

Erweiterung der Technischen Biegelehre

Ermittlung des zur Schnittgrößenkombination N_x , V_y , V_z , M_z , M_y und T_x gehörenden Verzerrungszustandes am Querschnitt

Teil 1: Aufstellung der Bedingungsgleichungen mit Überprüfung der Lösbarkeit

Bernhard Hartung, Darmstadt

Albert Krebs, Darmstadt

Im Stahlbetonquerschnitt geht wegen der Nichtlinearität beim Werkstoffverhalten die Möglichkeit der Superposition verloren. Für die allgemeine Schnittgrößenkombination (N_x , V_y , V_z , M_z , M_y und T_x) hat sich noch kein Lösungsweg zur Berechnung des zugehörigen Verzerrungszustandes im Querschnitt etabliert. Die den derzeitigen Normen zugrundeliegende Technische Biegelehre liefert nur für die Schnittgrößenkombination (N_x , M_y und M_z) den korrekten zugehörigen Verzerrungszustand, die sogenannte Dehnungsebene.

Die Technische Biegelehre wird nachfolgend derart erweitert, daß auch für die allgemeine Schnittgrößenkombination der zugehörige Verzerrungszustand berechnet werden kann. Er ist ebenfalls eine Dehnungsebene, die infolge der zu berücksichtigenden Gleitung zusätzlich noch verwölbt wird. Bei der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) werden analog der Technischen Biegelehre die notwendigen Bedingungen von Gleichgewicht und geometrischer Verträglichkeit bei realistischem Werkstoffverhalten erfüllt.

An Extension of the technical bending Theory

Because of the non-linearity of reinforced concrete, the technique of superposition cannot be used. For the usual combination of internal forces (N_x , V_y , V_z , M_z , M_y and T_x) no method of calculating the corresponding strains has yet been established. The classical bending theory which is applied in the current design codes provides for only three of the six internal forces (N_x , M_y and M_z) a corresponding state of strain.

Here, the technical bending theory is extended in such a way that the deformation can also be calculated for all the internal forces in the general case. This results in a state of strain that is curved because of the shearing strain which must be taken into consideration. The extension of the classical technical bending theory furthermore fulfills the necessary equilibrium and geometrical compatibility conditions and takes into account a realistic material behavior.

1 Einleitung

Für Nachweise am Querschnitt ist es erforderlich, den zur allgemeinen Schnittgrößenkombination gehörenden Verzerrungszustand zu berechnen. Hierbei darf in den ungestörten Bereichen der Stäbe vorausgesetzt werden, daß in Stablängsrichtung eine gleichmäßige Verwölbung des Querschnitts auftritt. Für homogene Querschnitte mit Hookeschem Werkstoffverhalten wurde die lineare Elastizitätstheorie entwickelt. Es entstanden Formeln und Rechenverfahren, die den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrungszustand beschreiben. Bedingt durch die Möglichkeit der Superposition kann damit der zu einer Schnittgrößenkombination gehörende Gesamtverzerrungszustand aus den separat berechneten Verzerrungszuständen jeder einzelnen Schnittgröße ermittelt werden. Diese Vorgehensweise wird zumeist im Stahlbau bei Nachweisen unter Gebrauchslast angewendet. Im Stahlbetonquerschnitt ist wegen der Inhomogenität des Querschnitts und der Nichtlinearität beim Werkstoffverhalten die Superposition nicht mehr möglich. Dies hat zur Folge, daß der zu einer Schnittgrößenkombination gehörende Verzerrungszustand als Gesamtverzerrungszustand berechnet werden muß.

Seit langem liegen mittels der Technische Biegelehre, einem Ausschnitt aus der Technischen Elastizitätstheorie, Lösungswege vor, mit welchen für die Schnittgrößenkombination Biegemomente mit Normalkraft der Verzerrungszustand, die sogenannte Dehnungsebene, iterativ berechnet werden kann. Für Schnittgrößenkombinationen, die zusätzlich noch die Querkkräfte und das Torsionsmoment enthalten, ist bisher kein Lösungsweg bekannt, bei dem analog der Technischen Biegelehre die notwendigen Bedingungen von Gleichgewicht und geometrischer Verträglichkeit mit realistischem Werkstoffverhalten erfüllt werden. Nach den Vorschriften soll für Querkraft und Torsion die Fachwerkanalogie genutzt werden, die jedoch nur die Gleichgewichtsbedingungen global erfüllt und das Fließen der Bügelbewehrung voraussetzt. Die fehlende Verträglichkeit wird hierbei durch empirische Formeln für die anzusetzende Druckstrebenneigung ersetzt. Die Eichung der Formeln erfolgt über Versuche, orientiert nach dem Bruchzustand, was bedeutet, daß die Fachwerkanalogie nur den Bruchzustand erfaßt.

Die Vielfalt der unterschiedlichen Regelungen in den nationalen Vorschriften offenbart, daß das Thema Schub immer noch nicht zufriedenstellend gelöst ist. Selbst DIN 1045

in der Ausgabe 1988 und DIN 4227, Teil 1, Ausgabe 1988 enthielten voneinander abweichende Konzepte. Auch die Änderung des EC 2 gegenüber dem CEB-Modelcode von 1978 und die nochmalige Änderung der DIN 1045-1 deuten darauf hin, daß immer noch keine allgemein anerkannte Gesetzmäßigkeit gefunden wurde, mit welcher das Schubtragverhalten realitätsnah vorausgesagt werden kann.

Die gut prüfbare Schnittstelle von Stabwerksberechnung (Schnittgrößen) und Querschnittsberechnung (Verzerrungen) bleibt erhalten.

Im ersten Teil der Veröffentlichung [1] wird deshalb die Technische Biegelehre derart erweitert, daß auch für die Schnittgrößenkombination N_x, V_y, V_z, M_z, M_y und T_x der zugehörige Gesamtverzerrungszustand über eine Berechnung am Querschnitt gewonnen werden kann. Die hierbei zugelegten Schnittgrößen können nicht nur mit linear-elastischen, sondern auch mit nichtlinearen Verfahren berechnet werden.

Im zweiten Teil der Veröffentlichung [1] wird auf die numerische und iterative Berechnung des Verzerrungszustandes eingegangen. Ferner wird an zwei Stahlbetonbalken (mit/ohne Vorspannung) die gute Übereinstimmung mit der Realität vorgestellt und am Beispiel einer sanierten Brücke die Möglichkeit der Anwendung der Theorie aufgezeigt.

2 Gültigkeit und Umfeld zur Formulierung der Theorie

Die Erweiterte Technische Biegelehre gilt in ungestörten Abschnitten prismatischer und längs der Stabachse gevouteter Stäbe. Die ihr zugrundeliegende Theorie erfaßt ein- und mehrfach zusammenhängende, dünn- und dickwandige Querschnitte und Vollquerschnitte. Zwecks Übersichtlichkeit wird die Herleitung der Theorie auf das Grundsätzliche reduziert, weshalb hier weder auf gevoutete Stäbe noch auf Vollquerschnitte eingegangen wird.

Es soll zunächst das Umfeld zur Formulierung der Theorie aufgebaut werden.

2.1 Struktur des Querschnitts

Die Geometrie eines Stababschnitts ist beispielhaft in Bild 1 dargestellt. Der Querschnitt kann aus Stahlbeton oder Baustahl bestehen oder als Verbundquerschnitt aus diesen Baustoffen zusammengesetzt sein. Querschnitte mit Hohlräumen sind durch Trennschnitte so lange aufzuschneiden, bis eine einfach zusammenhängende Kontur, bestehend aus Knotenelementen und Scheiben, vorliegt. Die Scheiben sind nochmals zu unterteilen, so daß Scheibenelemente entstehen. Zu guter Letzt sind die Knoten- und Scheibenelemente in materielle Punkte aufzulösen.

2.2 Struktur der Bewehrung

Die Geometrie der Bewehrung ist beispielhaft in Bild 2 dargestellt. In den Stegen können Bügel und in den Gurtscheiben Querbewehrungen angeordnet sein, beide dürfen rechtwinklig oder schräg zur Stabachse verlaufen. Jeder Steg und jede Gurtscheibe kann auch eine parallel zur Stabachse verlaufende, auf den Querschnitt bezogene Bewehrung enthalten. Die Bewehrungsstränge dürfen parallel oder geneigt zur Stabachse verlaufen. Sie können mit und ohne Verbund im Beton eingebettet sein. Bewehrungsstränge ohne Verbund dürfen auch außerhalb der Kontur liegen. Alle Bewehrungen können vorgespannt sein.

2.3 Verwendete Bezeichnungen

Das Basismaterial und die verschiedenen Bewehrungsarten erhalten zwecks kompakter Schreibweise der Formeln folgende Bezeichnungen:

- b Basismaterialien des Querschnitts (Beton, Baustahl)
- μ Bezogene Längsbewehrung (auf den Beton bezogen, parallel zur Stabachse)
- f Flächenbewehrung (in der Scheibenebene, gegenüber der Längsrichtung geneigt)
- P Punktbewehrung (Längsbewehrung: örtlich konzentriert, beliebig geneigt)

2.4 Koordinatensysteme und Integrationsweg

Die Geometrie ist in das globale xyz -System einzubetten. Für die Herleitung der Theorie muß weder die x -Achse im Schwerpunkt des Querschnitts liegen noch müssen die yz -Achsen die Hauptachsen des Querschnitts sein. Um unnötige Schnittgrößentransformationen zu vermeiden, wird nachfolgend die x -Achse in die Stabachse gelegt.

Zur Integration der inneren Kräfte über den Querschnitt sind die lokalen, scheinengebundenen lq -Systeme zu defini-

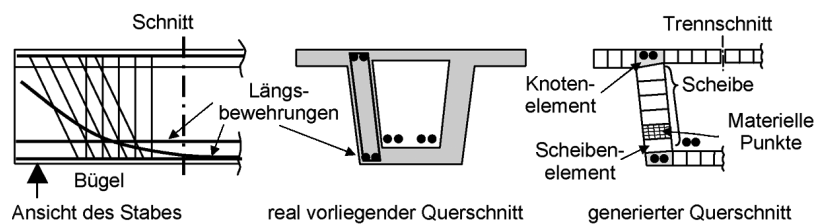


Bild 1 Querschnittsaufbereitung
Fig. 1 Cross section notation

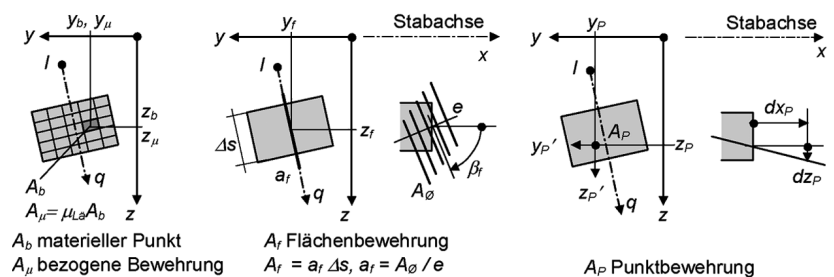


Bild 2 Flächen und Lage der Werkstoffe im Querschnitt
Fig. 2 Surface area and location of the materials in cross section

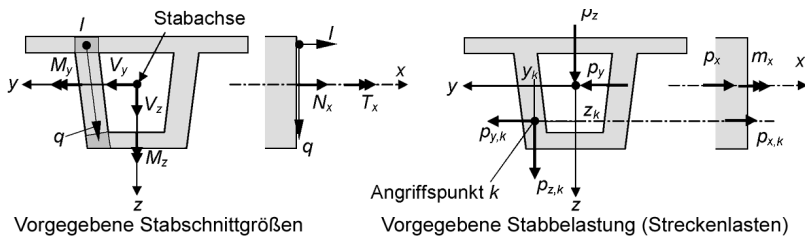


Bild 3 Schnittgrößen und Stablasten bei Blick gegen die x-Richtung
Fig. 3 Internal forces and uniformly distributed load facing the negative x-direction

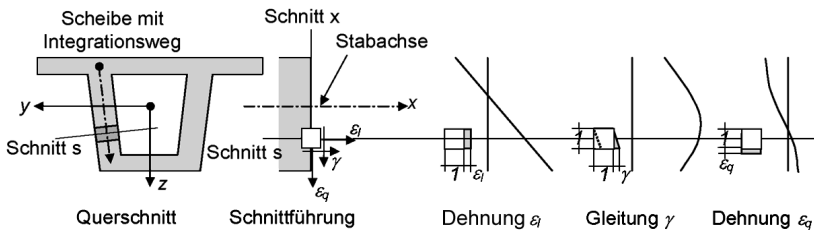


Bild 4 Scheibenverzerrungszustand, orientiert nach der Stabachse
Fig. 4 State of strain referring to the beam axis

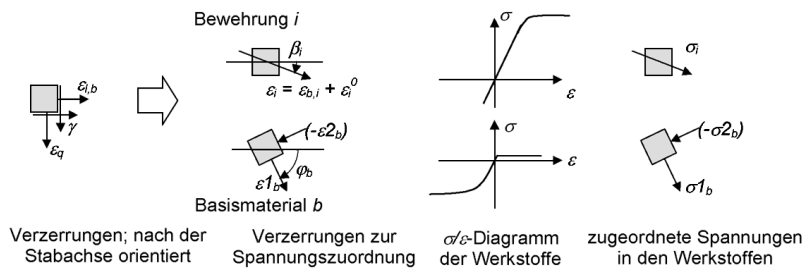


Bild 5 Zuordnung der Spannungen zu den Verzerrungen
Fig. 5 Stress and corresponding strain

nieren. Sie entstehen durch die Verbindung der Schwerpunkte der benachbarten Scheiben- und Knotenelemente. In Bild 3 ist beispielhaft das lq -System des linken Steges dargestellt, es beginnt im oberen und endet im unteren Knotenelement. Zur Integration über den Querschnitt ist noch der Integrationsweg derart festzulegen, daß von den Rändern und den Trennschnitten ausgehend die Scheiben nur einmal durchlaufen werden.

2.5 Einwirkungen

Auf den Querschnitt dürfen die Schnittgrößenkombination N_x, V_y, V_z, M_z, M_y und T_x und die Stablastenkombination $p_{x,k}, p_{y,k}$ und $p_{z,k}$ einwirken. In Bild 3 sind die Größen positiv wirkend dargestellt. Die Normalkraft und die zwei Querkräfte wirken in der Stabachse. Die Stabstreckenlasten wirken längs des Angriffspunktes k im Querschnitt und werden dort auch bei der Verzerrungsberechnung berücksichtigt.

Bei der Herleitung sind noch die auf die Stabachse bezogenen Stablasten erforderlich.

$$P_x = \sum_k p_{x,k}, P_y = \sum_k p_{y,k}, P_z = \sum_k p_{z,k}, m_x = \sum_k (p_{z,k} y_k - p_{y,k} z_k) \quad (1)$$

Die Schnittgrößen und die Stablasten orientieren sich, ebenso wie die Geometrie des Querschnitts, nach dem xyz-System.

3 Formulierung der Bedingungs-gleichungen

Bei der Technischen Biegelehre wird der Verzerrungszustand in einem Stab auf eine Berechnung am Querschnitt reduziert. Die wesentlichen Voraussetzungen für diese Vereinfachung sind:

- Ebenbleiben der Querschnitte
- Vernachlässigung der Schubverformungen und der Dehnungen in Querrichtung
- Erhaltung der Querschnittsgestalt

Die Gleitungen und die Dehnungen quer zur Stablängsrichtung werden voraussetzungsgemäß vernachlässigt. Hierdurch werden die Ergebnisse auf die Dehnungen in Richtung der Stabachse und die nur aus dem Gleichgewicht folgenden Schubkräfte reduziert.

Damit in der Erweiterten Technischen Biegelehre auch die noch fehlenden Verzerrungen berechnet werden können, müssen die vorangestellten Voraussetzungen erweitert werden:

- Gleichmäßige Verwölbung der Querschnitte
- Vernachlässigung der Verwölbungsänderung bei Stabstreckenlasten
- Erhaltung der Querschnittsgestalt

Bei diesen erweiterten Voraussetzungen kann in den Scheiben der vollständige Scheibenverzerrungszustand (ϵ_1, γ und ϵ_2) berechnet werden (Bild 4). In [2]–[4] sind die erweiterten Voraussetzungen ausführlich erläutert. Mit diesen Voraussetzungen ist es möglich, im gesamten Querschnitt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von Gleichgewicht und geometrischer Verträglichkeit unter Beachtung des realistischen Werkstoffverhaltens zu erfüllen.

3.1 Werkstoffverhalten

Das Werkstoffverhalten wird über die Spannungs-Dehnungszusammenhänge beschrieben. In Bild 5 wird, ausgehend vom Scheibenverzerrungszustand, die Zuordnung der Spannungen für das Basismaterial (Beton, Baustahl) und die Bewehrung dargestellt. Beim Basismaterial liefert der Scheibenverzerrungszustand die um den Winkel φ_b gedrehten Hauptverzerrungen ϵ_{1b} und ϵ_{2b} . Der zweiaxiale Scheiben Spannungszustand ist koaxial zum Verzerrungszustand und folgt über $\sigma_{1b} = \sigma(\epsilon_{1b}, \epsilon_{2b}, \dots)$ und $\sigma_{2b} = \sigma(\epsilon_{2b}, \epsilon_{1b}, \dots)$ aus den jeweils zugehörigen σ/ϵ -Diagrammen. Mit dieser Zuordnung (Hauptspannungen zu Hauptverzerrungen) ist die Kenntnis des Schubmoduls nicht erforderlich. Ferner können beim Baustahl Fließbedingungen und beim Beton die Abminderung der Druckfestigkeit durch Querdehnung direkt berücksichtigt werden.

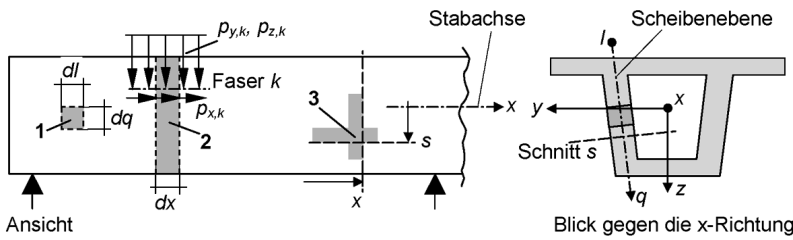


Bild 6 Schnittführung
Fig. 6 Section cuts

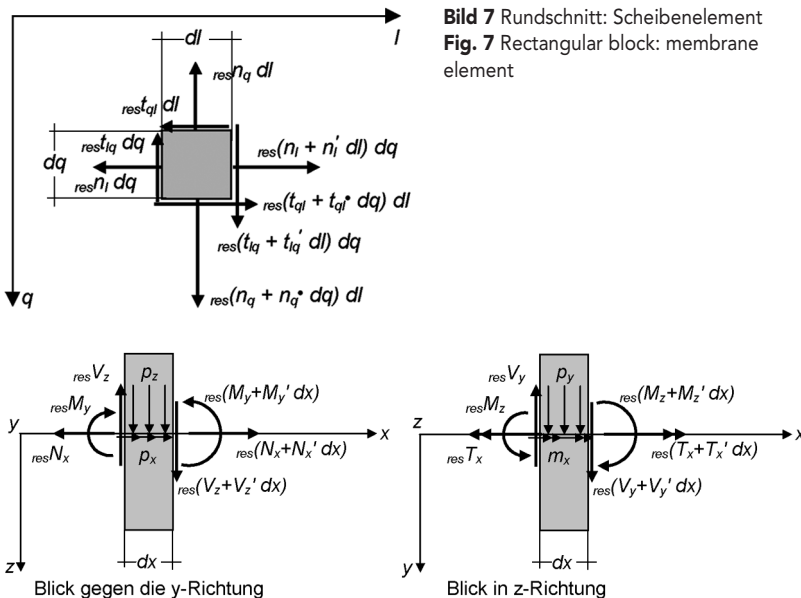


Bild 7 Rundschnitt: Scheibenelement
Fig. 7 Rectangular block: membrane element

Bild 8 Teilschnitt: Stabelement
Fig. 8 Orthogonal block: beam element

Bei gedehntem Beton wird der Verzerrungszustand mit verschmierten Rissen und mit rotierender Rißneigung berechnet. Für dieses Modell ist charakteristisch, daß Größe und Richtung der Kräfte im Beton auch ohne Kenntnis der in konkreten Rissen wirkenden Schubübertragungseffekte (Rißverzahnung, Verdübelung, ...) berechnet werden können. Dies bietet den Vorteil, daß zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen die noch mit Unsicherheiten behafteten Schubübertragungseffekte nicht erforderlich sind. Hiermit dürfte die in Teil 2 des Beitrages [1] dokumentierte gute Übereinstimmung von Rechnung und Versuch zu begründen sein.

Die Werkstoffmodellierung ohne Rißverzahnung, ohne Verdübelung und ohne Schubmodul liefert gute Übereinstimmung von Theorie und Realität.

Wegen der schräg zur Rißneigung verlaufenden Bewehrungen ist es zweckmäßig, die versteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen über entsprechende Zugspannungen im Beton zu berücksichtigen. Bei der Bewehrung folgt aus den Scheibenverzerrungen die Dehnung des Betons $\varepsilon_{b,i}$ in der Richtung β_i des Bewehrungsstabes i . Unter Beachtung der Vordehnung ε_i^0 liefert das zugehörige

σ/ε -Diagramm die Spannung $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_{b,i} + \varepsilon_i^0)$ im Bewehrungsstab. Für nicht im Verbund liegende Bewehrungen liefert $\varepsilon_{b,i}$ keinen Beitrag.

3.2 Gleichgewicht

Mit der allgemein gültigen Schnittmethode [5] werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt. Die Schnittführung zeigt Bild 6. Dargestellt sind der Rundschnitt (1), der Teilschnitt (2) und zwei Trennschnitte (3). Hierbei geht der eine Trennschnitt an der Stelle x durch den Stab und der andere Trennschnitt an der Stelle s durch eine Scheibe.

Zwecks kompakter Schreibweise werden bei den nachfolgenden Herleitungen für die partiellen Ableitungen folgende Kurzschreibweisen genutzt:

$$\left(\right)' = \frac{\partial \left(\right)}{\partial l} \equiv \frac{\partial \left(\right)}{\partial x} \quad \text{Erste Ableitung nach der Scheibenlängsrichtung (Stabachse)}$$

$$\left(\right)'' = \frac{\partial^2 \left(\right)}{\partial l^2} \equiv \frac{\partial^2 \left(\right)}{\partial x^2} \quad \text{Zweite Ableitung nach der Scheibenlängsrichtung (Stabachse)}$$

$$\left(\right)'_q = \frac{\partial \left(\right)}{\partial q} \quad \text{Erste Ableitung nach der Scheibenquerrichtung (Integrationsrichtung)}$$

$$\left(\right)'_p = \frac{\partial \left(\right)}{\partial p} \quad \text{Erste Ableitung nach der Veränderlichen } p \text{ (Iterationsparameter)}$$

Die aus den Spannungen berechneten Schnittgrößen, oft mit Spannungsergebnissen oder auch inneren Schnittgrößen bezeichnet, werden mit $res(\)$ gekennzeichnet.

Der Rundschnitt liefert den Zusammenhang der Spannungsergebnissen am Scheibenelement. Aus Bild 7 folgt die bekannte Gleichheit der Schubspannungen $res t_{ql} = res t_{lq} = res t$ und schließlich:

$$res t^* + res n_l' = 0, \quad res n_q^* + res t' = 0 \quad (2)$$

Der Teilschnitt liefert den Zusammenhang der Spannungsergebnissen am Stabelement untereinander und den Zusammenhang der Spannungsergebnissen mit der auf das Stabelement wirkenden Belastung. Aus Bild 8 folgt:

$$\begin{aligned} res N_x' &= -p_x, & res V_y' &= -p_y, & res V_z' &= -p_z \\ res T_x' &= -m_x, & res M_y' - res V_z &= 0, & res M_z' + res V_y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Stabstreckenlasten p_x, p_y, p_z und m_x folgen aus Gl. (1). Der Trennschnitt durch den Stab an einer Stelle x liefert die Äquivalenz der Spannungsergebnissen mit den Stabschnittgrößen.

$$\begin{aligned} \text{res}N_x &= N_x, & \text{res}V_y &= V_y, & \text{res}V_z &= V_z \\ \text{res}T_x &= T_x, & \text{res}M_y &= M_y, & \text{res}M_z &= M_z \end{aligned} \quad (4)$$

Die Stabschnittgrößen N_x , V_y , V_z , M_y und T_x folgen aus einer Berechnung am Stabwerk.

Der Trennschnitt durch eine Scheibe an einer Stelle s liefert die Äquivalenz der Spannungsresultanten mit den Schnittgrößen in der Scheibe.

$$\text{res}t = t, \quad \text{res}n_q = n_q \quad (5)$$

Die Stabstreckenlasten und die Stabschnittgrößen sind bekannt. Im Gegensatz hierzu sind die Scheibenschnittgrößen t und n_q unbekannt und müssen noch berechnet werden.

Die Ermittlung der Scheibenschnittgrößen wird in Abschn. 3.2.2 hergeleitet. Die Ermittlung der Spannungsresultanten wird in [1], Abschn. 1.2 beschrieben.

3.2.1 Gleichgewichtsbedingungen für den Schnitt x

Die Gln. (3) in (4) eingesetzt, umgeformt und sortiert liefern:

$$\begin{aligned} \text{res}N_x &= N_x, & \text{res}N_x' &= -p_x, & \text{res}N_x'' &= 0 \\ \text{res}M_y &= M_y, & \text{res}M_y' &= V_z, & \text{res}M_y'' &= -p_z \\ \text{res}M_z &= M_z, & \text{res}M_z' &= -V_y, & \text{res}M_z'' &= p_y \\ \text{res}T_x &= T_x, & \text{res}T_x' &= -m_x \end{aligned} \quad (6)$$

Die Spannungsresultanten sowie deren erste und zweite Ableitung nach der Stabachse stehen mit den Stabschnittgrößen und den Stablasten im Gleichgewicht. Die Ermittlung der Spannungsresultanten wird in [1], Abschn. 1.3 und 1.4 beschrieben.

3.2.2 Gleichgewichtsbedingungen für den Schnitt s

Bei dünnwandigen Profilen darf vorausgesetzt werden, daß die Scheibenkräfte t und n_q in der Scheibenebene wirken. Mit dieser Voraussetzung können die Scheibenkräfte üblicherweise wie folgt hergeleitet werden, vgl. [6].

Um die Schubkraft t zu erhalten, wird die erste Gleichung aus Gl. (2) einmal in Querrichtung q integriert und in die erste Gleichung aus Gl. (5) eingesetzt.

$$\text{Hieraus folgt: } t(s) = - \int_{\text{Anf}}^s \text{res}n'_l dq + C_0 \quad (7)$$

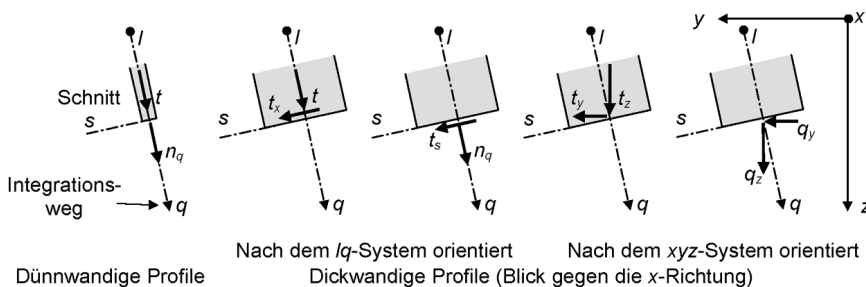


Bild 9 Bezeichnungen und Orientierung der Kraftgrößen am Scheibenelement
Fig. 9 Notation and direction of the forces at a membrane element

Um die Normalkraftkraft n_q zu erhalten, werden die beiden Gln. (2) zunächst nach der Stabachse x differenziert und zweimal in Querrichtung q integriert. Anschließend wird das Ergebnis in die zweite der Gln. (5) eingesetzt.

$$\text{Hieraus folgt: } n_q(s) = \int_{\text{Anf}}^s \left(\int_{\text{Anf}}^q \text{res}n_l'' dq + C_1 \right) dq + C_2 \quad (8)$$

Bei geschlossenen Profilen folgen die Integrationskonstanten aus Verformungsberechnungen. Bei offenen Profilen nehmen sie Null an. Die als Belastung anzusetzenden Scheibenkräfte t und n_q sind somit berechenbar und können den Spannungsresultanten $\text{res}t$ und $\text{res}n_q$ gegenübergestellt werden.

Bei dickwandigen Profilen können auch rechtwinklig zur Scheibenebene Kräfte auftreten, denn dickwandige Profile haben auch um die Scheibenebene eine Biegesteifigkeit und die eingebetteten Bewehrungsstränge müssen nicht nur in der Scheibenebene geneigt verlaufen. Um auch diese Situation zu erfassen, ist die vorangestellt beschriebene Herleitung, wie nachfolgend vorgestellt, zu modifizieren.

In Bild 9 werden am positiven Schnittufer die zur Herleitung erforderlichen Kraftgrößen dargestellt, wobei auf die Darstellung der Normalkräfte in Längsrichtung verzichtet wird. Bei dünnwandigen Profilen sind nur die Schubkraft t und die Normalkraft n_q vorhanden, sie wirken in der Scheibenebene (lq -Ebene). Bei dickwandigen Profilen kommen zu diesen Kräften noch die Schubkräfte t_x und t_z hinzu, sie wirken senkrecht zur Scheibenebene. Die Schubkraft t_x wirkt im Schnitt x und die Schubkraft t_z im Schnitt s . All diese Kraftgrößen sind nach dem lq -System orientiert.

Zur Herleitung ist es zweckmäßiger, nach dem xyz -System orientierte Kraftgrößen zu nutzen. Es sind dies die Schubkräfte t_y und t_z , die mit den Größen t und t_x über Gl. (14) verknüpft sind. Ferner sind es die Kräfte q_y und q_z , die mit den Größen n_q und t_s über Gl. (18) zusammenhängen.

3.2.2.1 Ermittlung der Schubkräfte t und t_x

Zur Erläuterung der Herleitung der Schubkraft $t(s)$ wird Bild 10 verwendet. Symbolisch dargestellt ist ein Steg mit zwei anschließenden Gurten, wobei der rechte Gurt zu einer geschlossenen Röhre gehört, die durch einen Trennschnitt aufgeschnitten wurde. Bei der Herleitung wird die im Trennschnitt wirkende Schubkraft t_0 als bekannt vorausgesetzt und als Stablast $p_{x,1}$ dort angebracht. Ferner sind in Bild 10 alle zur Herleitung erforderlichen Kraftgrößen dargestellt.

Zur Ermittlung der Schubkraft $t(s)$ wird ein Teil des Querschnitts durch den Schnitt s abgetrennt. Die im abgetrennten Teil des Querschnitts auftretende Änderung der Normalkraft längs der Stabachse muß mit der Schubkraft t_R im Gleichgewicht stehen. Bei der Ermittlung der Schubkraft wird zunächst, wie in der Technischen Biegelehre üblich, nur das Gleichgewicht erfüllt. Die

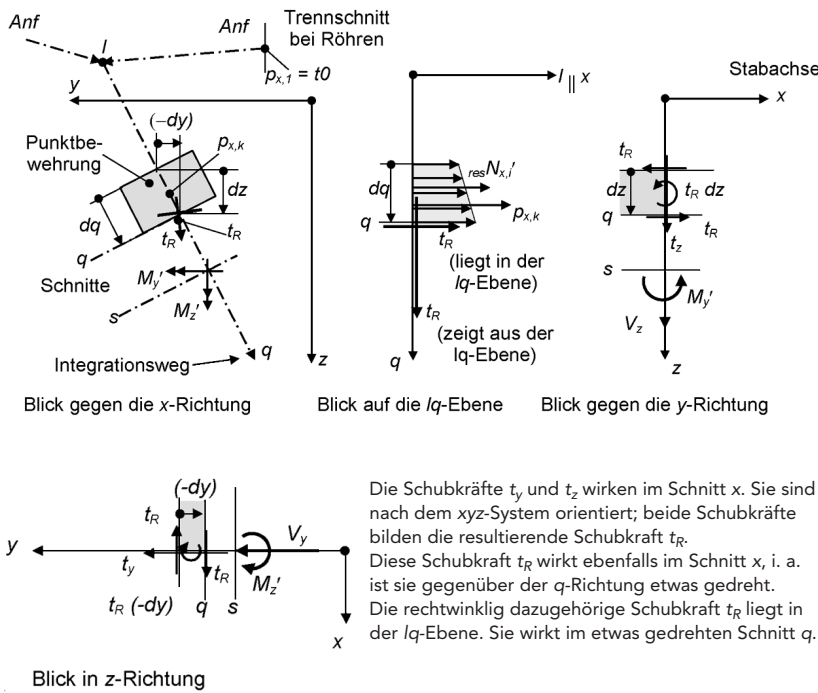


Bild 10 Schnittführung und Kräfte zur Herleitung der Schubkraft t
Fig. 10 Section cut and forces for the evaluation of the shear force

geometrische Verträglichkeit und das Werkstoffverhalten sind erst dann erfüllt, wenn die derart berechnete Schubkraft mit der aus den Spannungen berechneten Schubkraft übereinstimmt, wie dies Gl. (5) fordert. Dies liefert die ETB. Um dies sichtbar zu machen, werden nur die direkt aus den Spannungen berechneten Resultanten mit $res(\)$ gekennzeichnet, die daraus folgenden Größen erhalten nicht diese Bezeichnung.

Die Schubkraft t folgt aus der ersten Ableitung der Spannungsergebnisse nach der Stabachse. Die geometrische Verträglichkeit wird über $res\ t = t$ hergestellt.

Die Schubkraft $t_R(q)$ kann aus Bild 10, Blick auf die lq -Ebene, abgelesen werden.

$$t_R(q) = - \left(\sum_{Anf}^{i(q)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(q)} p_{x,k} \right) \quad (9)$$

Die Größen $V_z(s)$ und $M_y'(s)$ folgen aus Integrationen, vgl. Blick gegen die y -Richtung.

$$V_z(s) = \int_{Anf}^s t_z(q) dq, \quad M_y'(s) = \int_{Anf}^{z(s)} t_R(q) dz \quad (10a)$$

Die Größen $V_y(s)$ und $M_z'(s)$ folgen aus Integrationen, vgl. Blick in z -Richtung.

$$V_y(s) = \int_{Anf}^s t_y(q) dq, \quad M_z'(s) = - \int_{Anf}^{y(s)} t_R(q) dy \quad (10b)$$

Mit $V_z = res M_y'$ und $V_y = - res M_z'$ aus Gl. (6) kann für die Komponenten der Querkräfte $V_z(s)$ und $V_y(s)$ geschrieben werden:

$$V_z(s) = \int_{Anf}^{z(s)} t_R(q) dz = - \int_{Anf}^{z(s)} \left(\sum_{Anf}^{i(q)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(q)} p_{x,k} \right) dz$$

$$V_y(s) = \int_{Anf}^{y(s)} t_R(q) dy = - \int_{Anf}^{z(s)} \left(\sum_{Anf}^{i(q)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(q)} p_{x,k} \right) dy$$

Mit partieller Integration werden die zwei Gleichungen, analog [6], in berechenbare Ausdrücke umgeformt. Hier die erste der Gleichungen:

$$-V_z(s) = \int_{Anf}^{z(s)} \left(\sum_{Anf}^{i(q)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(q)} p_{x,k} \right) dz$$

Mit $u' = res N_{x,i}' + p_{x,k}$ und $v = z$ in $\int_a^b uv' = [vu]_a^b - \int_a^b vu'$ eingesetzt folgt daraus:

$$-V_z(s) = \left[z(q) \left(\sum_{Anf}^{i(q)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(q)} p_{x,k} \right) \right]_{Anf}^{z(s)} - \left(\sum_{Anf}^{i(s)} z_i res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(s)} z_k p_{x,k} \right)$$

$$-V_z(s) = z(s) \left(\sum_{Anf}^{i(s)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(s)} p_{x,k} \right) - z(Anf) \left(\sum_{Anf}^{i(Anf)} res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(Anf)} p_{x,k} \right) - \left(\sum_{Anf}^{i(s)} z_i res N_{x,i}' + \sum_{Anf}^{k(s)} z_k p_{x,k} \right)$$

Nachdem auch die zweite der Gleichungen analog umgeformt ist, lauten die Querkräfte:

$$V_z(s) = -z(s) res N_x'(s) + res M_y'(s) - z(s) \sum_{Anf}^{k(s)} p_{x,k} + \sum_{Anf}^{k(s)} z_k p_{x,k}$$

$$V_y(s) = -y(s) res N_x'(s) - res M_z'(s) - y(s) \sum_{Anf}^{k(s)} p_{x,k} + \sum_{Anf}^{k(s)} y_k p_{x,k} \quad (12)$$

Die Größen $res N_x'(s)$, $res M_y'(s)$ und $res M_z'(s)$ sind die erste Ableitung der auf die Stabachse bezogenen Spannungsergebnisse.

Vorgegeben durch den Integrationsweg, vgl. Abschn. 2.4, erfolgt die Integration von Schnitt zu Schnitt bis zum jeweils

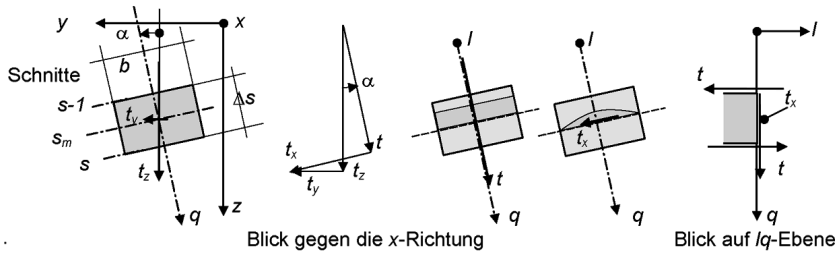


Bild 11 Transformation und Verteilung der Schubkräfte t und t_x
Fig. 11 Transformation and distribution of shear forces t and t_x

Die Schubkraft $t_x(s_m)$ wirkt im Schnitt x senkrecht zur Scheibenebene und in Schnitten parallel zur Scheibenebene. Der Verlauf über die Breite wird parabelförmig angenommen.

Die Herleitung zeigt, daß die Schubkraft $t(s_m)$, entsprechend der Technischen Biegelehre, zunächst allein aus dem Gleichgewicht folgt. Erst über die Bedingung $res t(s_m) = t(s_m)$, vgl. Gl. (5), werden in der Erweiterten Technischen Biegelehre die geometrische Verträglichkeit und das Werkstoffverhalten je Scheibenelement erfüllt. Die als bekannt vorausgesetzten Schubkräfte t_0 in den Trennschnitten der Röhren können natürlich nur aus einer Verformungsberechnung, analog der Technischen Elastizitätstheorie, gewonnen werden. Auf die Ermittlung wird in [1], Abschn. 2.3 eingegangen.

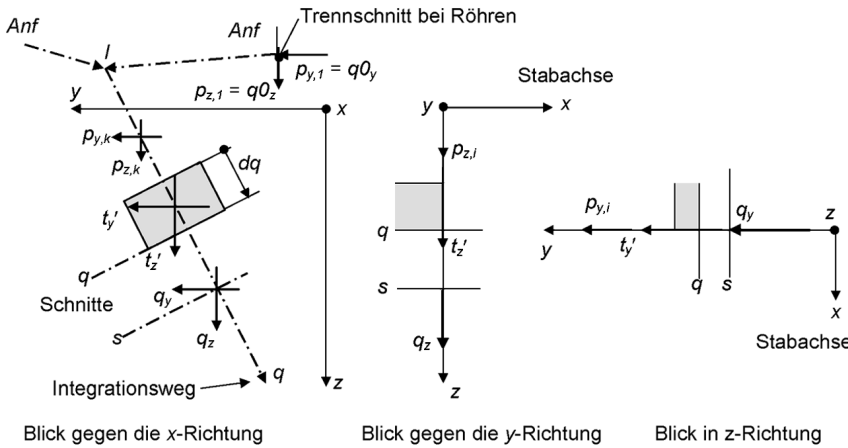


Bild 12 Schnittführung zur Ermittlung der Normalkraft n_q
Fig. 12 Section cut for the evaluation of the normal force n_q

3.2.2.2 Ermittlung der Normalkraft n_q und der Schubkraft t_s

aktuellen Schnitt s . Nach Abschluß der Integration geht der integrierte Bereich über den gesamten Querschnitt, und die Größen $res N_x'(Qu)$, $res M_y'(Qu)$ und $res M_z'(Qu)$ sind mit den Größen in Gl. (6) identisch.

Zur Herleitung der Normalkraft n_q wird der Querschnitt analog zur Herleitung der Schubkraft t aufbereitet. In Bild 12 ist die Situation mit den hierfür erforderlichen Kraftgrößen dargestellt.

Die im Trennschnitt wirkenden Kräfte $q_0 y$ und $q_0 z$ werden als bekannt vorausgesetzt und als Stablasten $p_{y,1}$ und $p_{z,1}$ dort angebracht.

Zur Ermittlung der Normalkraft $n_q(s)$ wird wiederum ein Teil des Querschnitts durch den Schnitt s abgetrennt. Die im abgetrennten Teil des Querschnitts auftretende Änderung der Schubkräfte längs der Stabachse muß mit den Kräften $q_y(s)$ und $q_z(s)$ im Gleichgewicht stehen. Auch an dieser Stelle ist die Bezeichnung $res()$ wegzulassen, da auch hier zunächst nur das Gleichgewicht erfüllt wird. Die Kräfte $q_y(s)$ und $q_z(s)$ können aus Bild 12 abgelesen werden.

Die Normalkraft n_q folgt aus der zweiten Ableitung der Spannungsresultanten nach der Stabachse. Die geometrische Verträglichkeit wird über $res n_q = n_q$ hergestellt.

Die im Schnitt s_m wirkenden, auf die Längeneinheit bezogenen Schubkräfte t_y und t_z folgen aus der Differenz der in den Schnitten $s-1$ und s wirkenden Querkräfte.

$$t_z(s_m) = \frac{\Delta V_z(s_m)}{\Delta s} \quad \text{mit} \quad \Delta V_z(s_m) = V_z(s) - V_z(s-1) \quad (13)$$

$$t_y(s_m) = \frac{\Delta V_y(s_m)}{\Delta s} \quad \text{mit} \quad \Delta V_y(s_m) = V_y(s) - V_y(s-1)$$

Die Schubkräfte $t_z(s_m)$ und $t_y(s_m)$ sind noch in das lq -System zu transformieren. Die Transformation kann aus Bild 11 abgelesen werden, die Schubkräfte $t(s_m)$ und $t_x(s_m)$ lauten:

$$\begin{pmatrix} t(s_m) \\ t_x(s_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t_z(s_m) \\ t_y(s_m) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Die Schubkraft $t(s_m)$ wirkt parallel zur Scheibenebene im Schnitt x und im Schnitt s_m (zwischen den Schnitten $s-1$ und s). Der Verlauf über die Breite wird konstant angenommen.

$$q_z(s) = - \int_{Anf}^s t_z'(q) dq - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{z,k}, \quad q_y(s) = - \int_{Anf}^s t_y'(q) dq - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{y,k} \quad (15)$$

Mit den Gln. (10a) und (10b) kann Gl. (15) wie folgt geschrieben werden.

$$q_z(s) = -V_z'(s) - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{z,k}, \quad q_y(s) = -V_y'(s) - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{y,k}$$

Jetzt können die differenzierten Gln. (12) eingesetzt werden und die Kräfte $q_y(s)$ und $q_z(s)$ liegen berechenbar vor.

$$q_z(s) = z(s) res N_x''(s) - res M_y''(s) + z(s) \sum_{Anf}^{k(s)} p_{x,k}' - \sum_{Anf}^{k(s)} z_k p_{x,k}' - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{z,k}$$

$$q_y(s) = y(s) res N_x''(s) + res M_z''(s) + y(s) \sum_{Anf}^{k(s)} p_{x,k}' - \sum_{Anf}^{k(s)} y_k p_{x,k}' - \sum_{Anf}^{k(s)} p_{y,k} \quad (16)$$

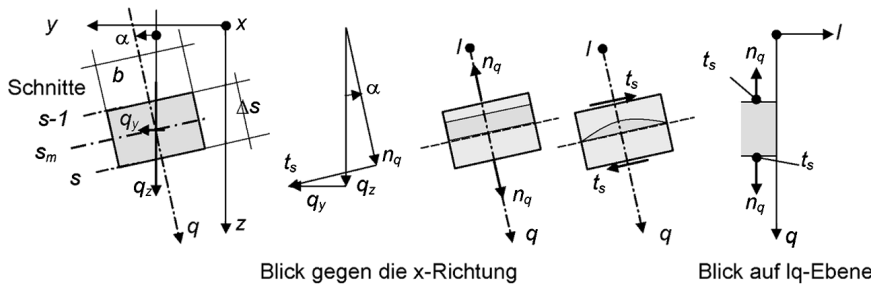


Bild 13 Transformation und Verteilung der Normalkraft n_q und der Schubkraft t_s
Fig. 13 Transformation and distribution of the normal force n_q and the shear force t_s

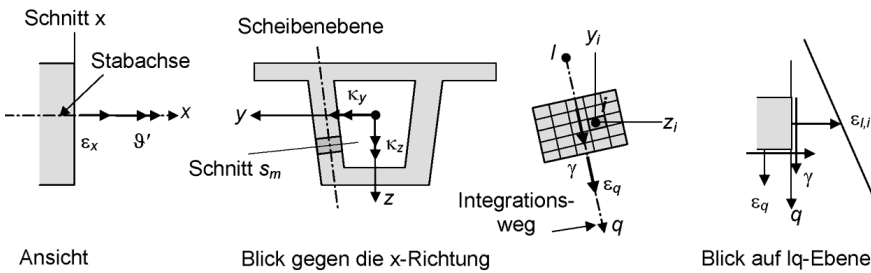


Bild 14 Verzerrungszustand der Querschnitts- und der Scheibenelemente
Fig. 14 State of strain of the cross section and the membrane elements

Die Größen ${}_{res}N_x''(s)$, ${}_{res}M_y''(s)$ und ${}_{res}M_z''(s)$ sind die zweite Ableitung der auf die Stabachse bezogenen Spannungsergebnanten.

Vorgegeben durch den Integrationsweg, vgl. Abschn. 2.4, erfolgt die Integration von Schnitt zu Schnitt bis zum jeweils aktuellen Schnitt s . Nach Abschluß der Integration geht der integrierte Bereich über den gesamten Querschnitt und die Größen ${}_{res}N_x''(Qu)$, ${}_{res}M_y''(Qu)$ und ${}_{res}M_z''(Qu)$ sind mit den Größen in Gl. (6) identisch.

Die im Schnitt s_m wirkenden Kräfte q_y und q_z folgen aus dem Mittelwert der in den Schnitten $s-1$ und s wirkenden Kräfte.

$$q_z(s_m) = \frac{1}{2}(q_z(s-1) + q_z(s)), \quad q_y(s_m) = \frac{1}{2}(q_y(s-1) + q_y(s)) \quad (17)$$

Die Kräfte $q_z(s_m)$ und $q_y(s_m)$ sind noch in das lq -System zu transformieren. Die Transformation zeigt Bild 13. Die Normalkraft $n_q(s_m)$ und die Schubkraft $t_s(s_m)$ lauten:

$$\begin{pmatrix} n_q(s_m) \\ t_s(s_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_z(s_m) \\ q_y(s_m) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die Normalkraft $n_q(s_m)$ wirkt im Schnitt s_m (zwischen den Schnitten $s-1$ und s) parallel zur Scheibenebene. Der Verlauf über die Breite wird konstant angenommen. Die Schubkraft $t_s(s_m)$ wirkt im Schnitt s_m (zwischen den Schnitten $s-1$ und s) senkrecht zur Scheibenebene. Der Verlauf über die Breite wird parabelförmig angenommen.

Die Herleitung zeigt, daß die Normalkraft $n_q(s_m)$, entsprechend der Technischen Biegelehre, zunächst allein aus dem Gleichgewicht folgt. Erst über die Bedingung ${}_{res}n_q(s_m) = n_q(s_m)$, vgl. Gl. (5), werden in der Erweiterten Technischen Biegelehre die geometrische Verträglichkeit und das Werkstoffverhalten je Scheibenelement erfüllt.

Die als bekannt vorausgesetzten Kräfte q_{0y} und q_{0z} , in den Trennschnitten der Röhren können natürlich nur aus einer Verformungsberechnung, analog der Technischen Elastizitätstheorie gewonnen werden. Auf die Ermittlung wird in [1], Abschn. 2.4 eingegangen.

Die auf das Scheibenelement wirkenden Differenzkräfte folgen aus:

$$\begin{aligned} \Delta q_y(s_m) &= q_y(s) - q_y(s-1), \\ \Delta q_z(s_m) &= q_z(s) - q_z(s-1) \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Kräfte werden zur Ermittlung der ersten Ableitung des Torsionsmomentes ${}_{res}T'$ nach der Stabachse benötigt.

3.3 Verzerrungszustand

Der Verzerrungszustand (Bild 14) wird durch die Querschnittsverzerrungen sowie deren erste und zweite Ableitung nach der Stabachse und den Scheibenverzerrungen beschrieben.

Die Querschnittsverzerrungen sind nach dem xyz -System orientiert:

- $\epsilon_x, \epsilon_x', \epsilon_x''$ Dehnung der Stabachse (x -Achse) und deren Ableitungen
- $\kappa_y, \kappa_y', \kappa_y''$ Krümmung um die y -Achse und deren Ableitungen
- $\kappa_z, \kappa_z', \kappa_z''$ Krümmung um die z -Achse und deren Ableitungen

Die Scheibenverzerrungen sind nach dem lq -System orientiert:

- $\epsilon_{l,i}$ Dehnung des Punktes i in Längsrichtung (l -Richtung)
- γ Gleitung des Scheibenelementes in der lq -Ebene
- ϵ_q Dehnung des Scheibenelementes in Querrichtung (q -Richtung)

Die Dehnung $\epsilon_{l,i}$ im Punkt y_i, z_i folgt aus den Verzerrungen $\epsilon_x, \kappa_y, \kappa_z$ zu: $\epsilon_{l,i} = \epsilon_x + z_i \kappa_y - y_i \kappa_z$. Für die Ableitungen nach der Stabachse gilt dies analog. Die Gleitung γ und die Dehnung ϵ_q sind je Scheibenelement konstant. Die Ableitungen nach der Stabachse werden zu Null angenommen. Bei geschlossenen Profilen kommen folgende Querschnittsverzerrungen hinzu:

- .. Je Querschnitt die Änderung der Stabdrehung ϑ nach der Stabachse
- ϑ', ϑ'' Drillung, Verwindung (Ableitung der Drillung)

.. Je Trennschnitt einer jeden Röhre die in Bild 15 dargestellten fiktiven Weggrößen

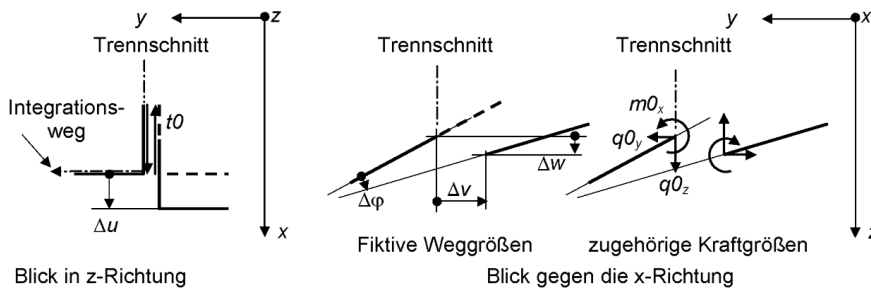


Bild 15 Fiktive Weggrößen mit den zugehörigen Kraftgrößen in den Trennschnitten
Fig. 15 Fictitious displacements and corresponding forces at the section cuts

Berechnung schließt Δv , Δw und $\Delta \varphi$ mit den Kraftgrößen q_{0z} , q_{0y} und m_{0x} , vgl. [1], Abschn. 2.4.

4 Überprüfung der Lösbarkeit

Die in Abschn. 3 erarbeiteten Bedingungen sind in der Tabelle 1 zwecks Bilanz von Gleichungen und Freiheitsgraden sowie zur Beschreibung des Lösungsverfahrens zusammengestellt. Die Gruppe 4 ist nur bei Querschnitten mit Torsionselementen vorhanden. Die Schubkraft t der Gruppe 5 folgt aus Gruppe 2 mit t_0 der Gruppe 4.1. Die Normalkraft n_q der Gruppe 5 folgt aus Gruppe 3 mit q_{0y} , q_{0z} der Gruppe 4.2.2.

4.1 Bilanz

Den elf Verzerrungen je Querschnitt ($3 \cdot 3 + 2$) und den zwei Verzerrungen je Scheibenelement stehen ebensoviel Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Den fünf Kraftgrößen je Torsionselement stehen gleichviel Verformungsbedingungen gegenüber. Eine Lösung ist somit möglich.

4.2 Lösungsweg

Bei nichtlinearem Werkstoff kann der Verzerrungszustand nur iterativ berechnet werden. Durch fachliche Sortierung entstehen die in Tabelle 1 dargestellten Gleichungsgruppen mit folgender Eigenschaft: Die Gleichungen innerhalb einer Gruppe beeinflussen sich direkt, diejenigen unterschiedlicher Gruppen nur indirekt.

Die Theorie wurde in ein Rechenprogramm implementiert. Hierbei konnte mit folgender Realisierung eine stabile Iteration erreicht werden:

Als Iterationsparameter wurden direkt die unbekanntenen Freiheitsgrade gewählt. Orientiert nach Tabelle 1 wurden fünf geschachtelte Iterationsebenen programmiert, wobei die Gruppe 1 die äußerste und die Gruppe 5 die innerste Iterationsebene darstellt.

Gruppe	Anzahl Gleichungen je Bezugselement	Bedingungsgleichungen	Freiheitsgrade	Herkunft (Gleichungen) Hinweise
1	3 je Querschnitt	$res N_x = N_x$ $res M_y = M_y$ $res M_z = M_z$	$\epsilon_x(Qu)$ $\kappa_y(Qu)$ $\kappa_z(Qu)$	(6)
2	3 je Querschnitt	$res N_x' = -p_x$ $res M_y' = Q_z$ $res M_z' = -Q_y$	$\epsilon_x'(Qu)$ $\kappa_y'(Qu)$ $\kappa_z'(Qu)$	(6) (12), Grundlage für t
3	3 je Querschnitt	$res N_x'' = 0$ $res M_y'' = -p_z$ $res M_z'' = p_y$	$\epsilon_x''(Qu)$ $\kappa_y''(Qu)$ $\kappa_z''(Qu)$	(6) (16), Grundlage für n_q
4.1	1 je Querschnitt 1 je Torsionselement	$res T_x = T_x$ $\Delta u = 0$	$\vartheta'(Qu)$ $t_0(ToE)$	(6) (20; 14, 13, 12), $p_{x,1} = t_0$, Bild 10
4.2.1	1 je Querschnitt 1 je Torsionselement	$res T_x' = -m_x'$ $\Delta u' = 0$	$\vartheta''(Qu)$ $t_0'(ToE)$	(6) (16), $p_{x,1}' = t_0'$
4.2.2	3 je Torsionselement	$\Delta v = 0$ $\Delta w = 0$ $\Delta \varphi = 0$	$q_{0z}(ToE)$ $q_{0y}(ToE)$ $m_{0x}(ToE)$	(21; 18, 17, 16), $p_{y,1} = q_{0y}$, $p_{z,1} = q_{0z}$, Bild 12
5	2 je Scheibenelement	$res t = t$ $res n_q = n_q$	$\gamma(s_m)$ $\epsilon_q(s_m)$	(5)

Tabelle 1 Gegenüberstellung von Bedingungsgleichungen und Freiheitsgraden
Table 1 Correspondents of conditions and degree of freedom

- Δu Verschiebung der Ufer in Längsrichtung
- Δv Spreizung der Ufer in y-Richtung
- Δw Spreizung der Ufer in z-Richtung
- $\Delta \varphi$ Knick der Biegelinie in Querrichtung

Mit Erfüllung der Bedingungen

$$\Delta u = 0 \tag{20}$$

$$\Delta v = 0, \Delta w = 0, \Delta \varphi = 0 \tag{21}$$

bleiben die Röhren geschlossen. Das Schließen erfolgt mit zwei Verformungsberechnungen. Die erste Berechnung schließt Δu mit der Kraft t_0 , vgl. [1], Abschn. 2.3. Die zweite

5 Fazit

Mit der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) wird ein Lösungsweg vorgestellt, mit welchem der zur allgemeinen Schnittgrößenkombination (N_x , V_y , V_z , M_z , M_y und T_x) gehörige Verzerrungszustand mit der mechanisch hohen Qualität der Technischen Biegelehre (TB), hier aber nur für Biegung mit Normalkraft, ermittelt werden kann. Da die

ETB analog der TB jede Lastintensität beschreibt, können mit ihr auch die Grenzzustände der Tragfähigkeit (ULS) und der Gebrauchstauglichkeit (SLS) nachgewiesen werden. Mit der ETB liegt somit erstmals eine in sich geschlossene, beide Grenzzustände erfassende Theorie vor, mit der bei den Nachweisen am Querschnitt die Interaktion der Schnittgrößen mechanisch korrekt erfaßt wird. Damit verbunden ist, daß die zurzeit notwendigen, mit der Fachwerkanalogie zu führenden Extranachweise für Querkraft und Torsion nicht mehr erforderlich sind, was den Nachweisumfang reduziert.

Das durch DIN 1045-1, vgl. [7], [8], vorgegebene Nachweisformat kann somit für alle Schnittgrößenkombinationen wie folgt einheitlich realisiert werden:

$E_d \leq R_d$ für den Grenzzustand ULS

$E_d \leq C_d$ für den Grenzzustand SLS

$E_d(ULS)$ sind hierbei die extremen *Dehnungen* und *Stauchungen* in den Werkstoffen. Sie folgen aus dem zur Schnittgrößenkombination $S_d(ULS)$ gehörenden Verzerrungszustand. $E_d(SLS)$ sind hierbei die extremen *Spannungen* in den Werkstoffen und die extremen *Rißbreiten* im Beton. Die Spannungen und Rißbreiten folgen aus dem zur Schnittgrößenkombination $S_d(SLS)$ gehörenden Verzerrungszustand.

Die ETB liefert zur allgemeinen Schnittgrößenkombination den zugehörigen Verzerrungszustand; so wie dies, allerdings nur für Biegung mit Normalkraft, die TB liefert.

Die zu den Schnittgrößenkombinationen $S_d(ULS)$ und $S_d(SLS)$ gehörenden Verzerrungszustände folgen mit der ETB aus einer Berechnung am Querschnitt. Die Schnittgrößenkombinationen S_d folgen aus einer Berechnung am System. Hierbei können sowohl linear-elastische als auch nichtlineare Berechnungsverfahren zugrundegelegt werden.

Bei Anwendung der ETB wird demnach die Interaktion der Schnittgrößen mechanisch richtig ermittelt. Dabei kann die gut prüfbare Schnittstelle zwischen der Berechnung der Schnittgrößen am System und der Berechnung der Beanspruchungen im Querschnitt erhalten bleiben.

Literatur

[1] Krebs, A., Schnell, J. und Hartung, B.: Erweiterung der Technischen Biegelehre. Teil 2. In: Beton- und Stahlbetonbau 99, 2004, H. 7. Verlag Ernst & Sohn, Berlin.

- [2] Schlee, W.: Bauteile mit zweiachsigem Spannungszustand (Scheiben), Betonkalender 1983, Teil II, Berlin-München, Wilhelm Ernst & Sohn 1983.
- [3] Schlee, W.: Die Kragsscheibe im Zustand I und das Saint-Venantsche Prinzip in der Balkenbiegelehre, Beton- und Stahlbetonbau 61, 1966, H. 8, S. 193–201, Verlag Ernst & Sohn, Berlin.
- [4] Hanzal, A.: Zur Interpretation des Bernoullischen Theorems, Bauingenieur 1965, H. 11, S. 438.
- [5] Swain, G. F. und Mehmel, A.: Festigkeitslehre, Berlin, Julius Springer 1928.
- [6] Czerwenka, G. und Schnell, W.: Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I, Hochschultaschenbücher 124/124a, Mannheim, Bibliographisches Institut 1967.
- [7] DIN 1045-1, Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Juli 2001.
- [8] Erläuterungen zu DIN 1045-1, Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 525, September 2003, Berlin-Wien-Zürich, Beuth Verlag GmbH.

Schlüsselwörter:

Erweiterte Technische Biegelehre – stabförmige Bauteile – Nichtlineare Berechnungen – Berechnungen am Querschnitt – Scheibenverzerrungen im Querschnitt



Dr.-Ing. Bernhard Hartung

Krebs und Kiefer, Beratende Ingenieure
für das Bauwesen GmbH
Hilpertstraße 20
64295 Darmstadt
hg@da.kuk.de



Prof. Dr.-Ing. Albert Krebs

Krebs und Kiefer, Beratende Ingenieure
für das Bauwesen GmbH
Hilpertstraße 20
64295 Darmstadt
kr@da.kuk.de