

# Zur Stabilität von in Querrichtung gekoppelten Biegeträgern

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Schardt zum 70. Geburtstag gewidmet

Häufig werden Biegeträger in Querrichtung über anschließende Bauteile miteinander verbunden. Liegt an den Verbindungsstellen keine starre seitliche Stützung vor, läßt sich die Biegedrillknicklast der Träger oft nur über Systembetrachtungen bestimmen. Im folgenden Beitrag werden Verfahren zur Berechnung von in Querrichtung gekoppelten Trägersystemen beschrieben. Für Standardfälle werden Formeln und Diagramme angegeben, die eine schnelle Ermittlung der Biegedrillknicklasten ermöglichen. Die Anwendung wird an einem typischen Beispiel gezeigt.

**Stability of cross-connected coupled beams.** *Often bending girders are cross-connected by adjacent structural members. If there is no rigid lateral support at the connection points, the loads of lateral-torsional-buckling must often be determined by investigating whole systems. This publication deals with methods of calculating systems of cross-connected beams. For standard cases formulas and diagrams which allow fast determination of loads of lateral-torsional buckling are given. A typical example shows their use.*

## 1 Einführung

In der Praxis werden häufig Trägersysteme ausgeführt, bei denen die einzelnen Träger unterschiedlich stark ausgenutzt sind. Eine Ursache dafür ist zum Beispiel, daß man Träger trotz abweichender Belastung konstruktiv gleich ausbildet. Bedingt durch Wander- und Montagelasten können sich jedoch auch unterschiedliche Ausnutzungen für einen bestimmten Zeitpunkt ergeben. Ein typisches Beispiel hierfür sind Kranbahnen, deren Träger für die maximalen Radlasten ausgelegt werden. Die größten Raddrücke ergeben sich, wenn die Laufkatze mit der maximalen Hakenlast dicht neben einem der Kranbahnträger steht. Bei dieser Katzzstellung wirken auf dem anderen Kranbahnträger deutlich kleinere Raddrücke.

Koppelt man unterschiedlich belastete Träger in Querrichtung miteinander (Bild 1a), so wirken sie beim räumlichen Stabilitätsversagen Biegedrillknicken zusammen. Die weniger beanspruchten Träger stabilisieren die stärker beanspruchten.

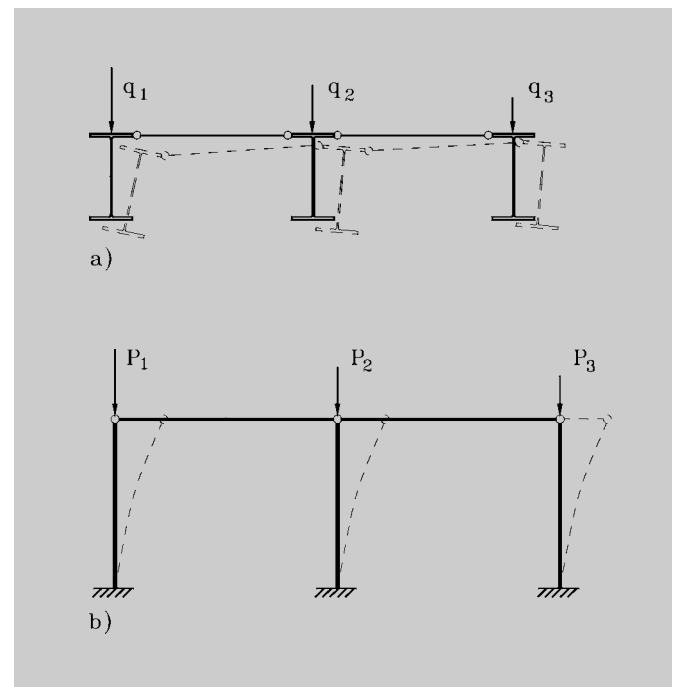
In Stahltragwerken findet man häufig Träger mit Querverbindungen vor. Zum Beispiel werden Binder oder Unterzüge durch Pfetten oder Nebenträger miteinander gekoppelt. Über Dacheindeckungen, Wandverkleidungen und Deckenbeläge liegen mehr oder weniger kontinuierliche Kopplungen von Trägern oder Stützen vor. Eine Scheibenwirkung kann oft aufgrund der konstruktiven Ausbildung nicht in Rechnung gestellt werden.

Obleich das Zusammenwirken von Trägern in den zuvor beschriebenen Beispielen offensichtlich ist, wird dies im allgemeinen nicht berücksichtigt. Das kann darin begründet sein, daß man die durch die Kopplung bedingten Sicherheitsreserven nicht ausschöpfen möchte. Häufig fehlt es jedoch an geeigneten Hilfsmitteln, den Effekt der Kopplung mit vertretbarem Aufwand rechnerisch zu erfassen. Im Fall des Biegeknickens gehört die Berücksichtigung von Kopplungen zur gängigen Berechnungspraxis (Bild 1b).

## 2 Zum Tragverhalten gekoppelter Träger

### 2.1 Allgemeines

In den zwei folgenden Abschnitten wird anhand von Beispielen das Tragverhalten von Systemen mit gekoppelten Trägern erörtert. Die hierzu notwendigen Berechnungen wurden mit dem speziell für Stabilitätsprobleme entwickelten FEM-Programm PROFIL [1] durchgeführt. Sofern keine gegenteiligen Angaben gemacht werden, ist der Einfluß von Querschnittsverformungen in den Berechnungsergebnissen enthalten.



**Bild 1.** Gekoppelte Stäbe; a) Träger, b) Stützen  
**Fig. 1.** Coupled bars; a) beams, b) columns

### 2.2 Gelenkige Kopplungen

Bild 2 zeigt zwei querbelastete I-Träger, die über dehnstarre Pendelstäbe auf vier verschiedene Arten miteinander gekoppelt sind. Die Träger haben einen doppelt-symmetrischen Querschnitt, bestehen aus zusammengesetzten Blechen und sind an den Enden gabelgela-gert.

In Bild 3 sind die Verzweigungslasten der Systeme in Abhängigkeit vom Belastungsverhältnis  $q_2/q_1$  aufgetragen. Besonders wirksam ist die Kopplung beider Gurte (Linie c). Die Verzweigungslast ist nahezu unabhängig vom Belastungsverhältnis. Ebenfalls wirksam ist die Kopplung der Obergurte. Dabei ist es unbedeutend, ob die Träger nur in Feldmitte (Linie a) oder in den Viertelspunkten (Linie d) verbunden werden. Hingegen ist die Kopplung der Untergurte (Linie b) wirkungslos. Vom Belastungsverhältnis 0 bis zum Belastungsverhältnis 1 verdoppelt sich die Verzweigungslast annähernd.

Die vorgestellten Ergebnisse entsprechen der Anschauung. Sie zeigen Tendenzen auf, lassen sich jedoch nicht unmittelbar auf andere Verhältnisse übertragen. Hinweise darüber, an welcher Stelle eine Kopplung am effektivsten ist, können der jeweiligen Verzweigungsfigur entnommen werden. Im vorliegenden Beispiel zeigen die Verzweigungsfiguren der Einzelträger nur sehr kleine Untergurtverschiebungen. Eine Kopplung wird dort nur wirksam, wenn gleichzeitig die Obergurte miteinander verbunden werden. In diesem Fall sind die Relativverschiebungen der Gurte über die Stablänge so gering, daß sich die Verzweigungslast des Systems für beliebige Belastungsverhältnisse näherungsweise aus der Addition der Verzweigungslasten der Einzelträger ergibt (s. Bild 3, Linie c).

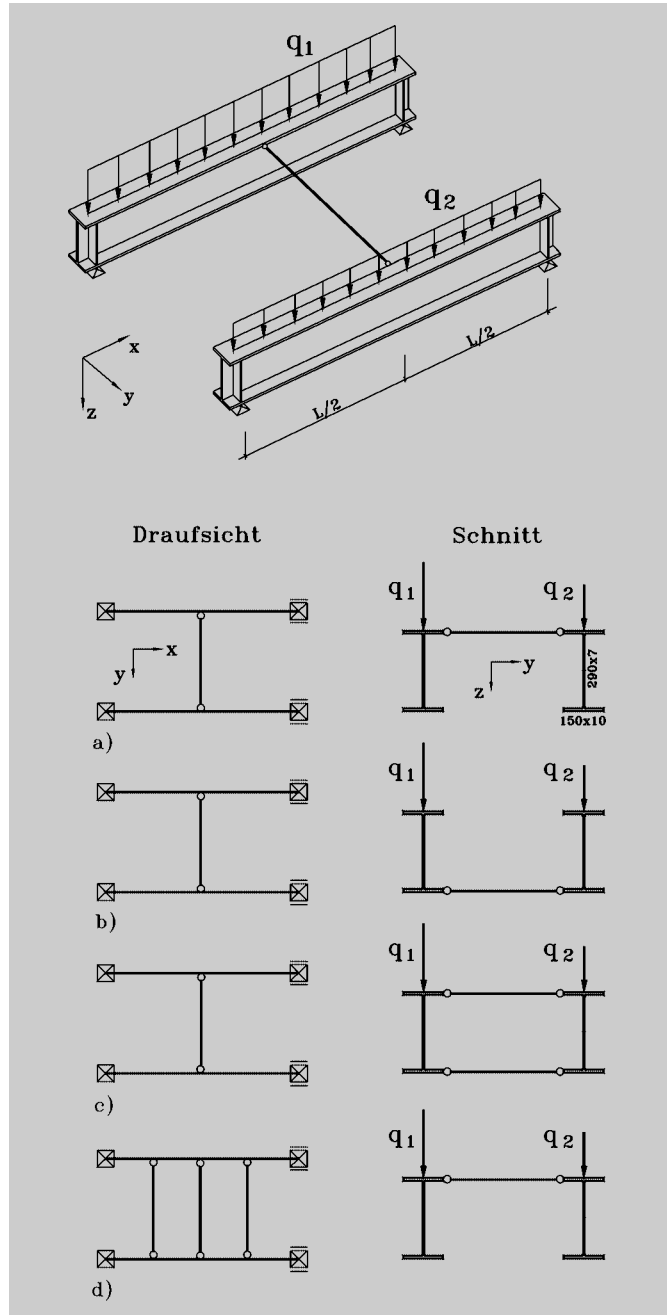
### 2.3 Biegesteife Kopplungen

Oft werden Verbindungsstäbe zu benachbarten Trägern oder Stützen nicht gelenkig, sondern biegesteif angeschlossen. Dabei kann es sich zum Beispiel um Dach- oder Wandpfetten handeln, die auf die Gurte von Bindern oder Stützen aufgeschraubt werden. In diesem Fall kommt zum Effekt der Kopplung noch der Einfluß einer drehelastischen Stützung hinzu.

Bild 4 zeigt ein System mit biegesteifer Kopplung und die zugehörige Ausweichfigur. Im Bereich des Querträgeranschlusses stellen sich Querschnittsverformungen ein, die die Steifigkeit des Systems wesentlich beeinflussen.

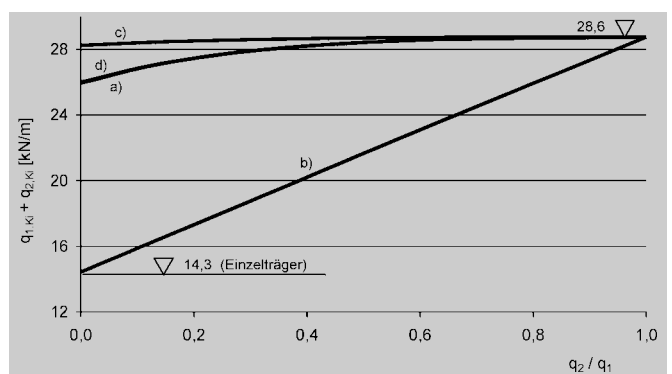
Zum besseren Verständnis wird zunächst die Wirkung einer diskreten drehelastischen Gurteinspannung isoliert vom Effekt der Kopplung betrachtet. Um den Bezug zum vorangegangenen Beispiel herzustellen, werden Trägerquerschnitt, Spannweite und Belastung übernommen. In Bild 5 sind die Verläufe der Verzweigungslasten  $q_{Ki}$  ohne und mit Berücksichtigung der Querschnittsverformungen in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit  $C_{xx}$  aufgetragen.

Der Vergleich zeigt, daß der Einfluß der Querschnittsverformungen mit zunehmender Einspannung an Bedeutung gewinnt. Wird sie vernachlässigt, geht der Verlauf  $q_{Ki}$  nach einem starken Anstieg in eine horizontale Gerade über (Bild 5). Die Eigenform des Trägers wechselt von einem symmetrischen zu einem anti-



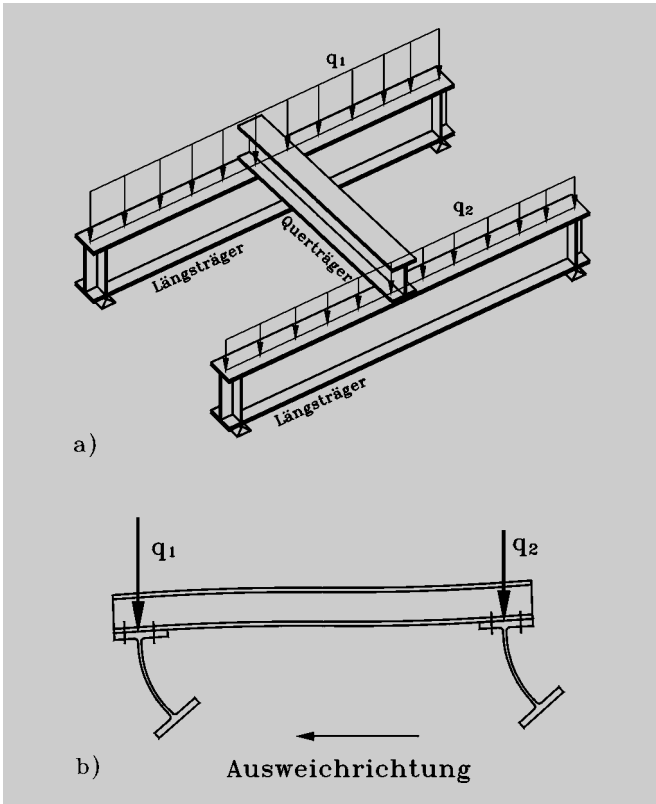
**Bild 2.** Biegeträger mit verschiedenen Kopplungen durch Pendelstäbe

**Fig. 2.** Bending girders with various couplings by articulated bars

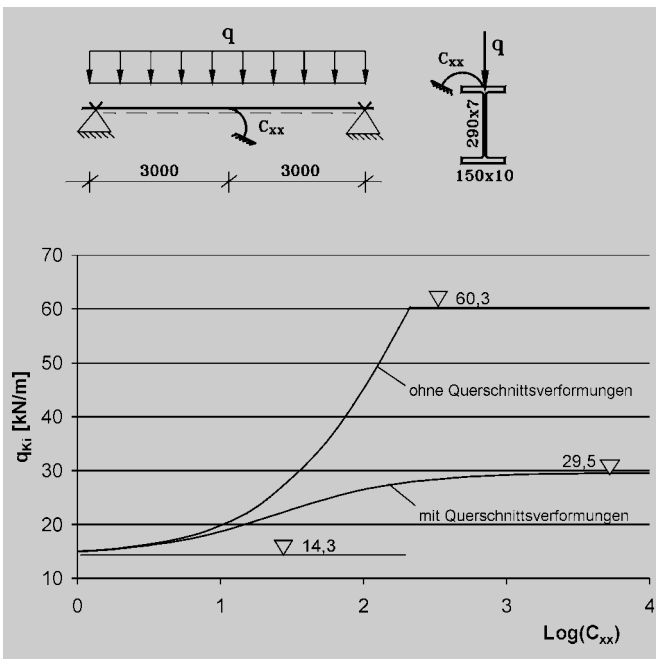


**Bild 3.** Verzweigungslasten der Systeme nach Bild 2

**Fig. 3.** Buckling loads for systems by fig. 2

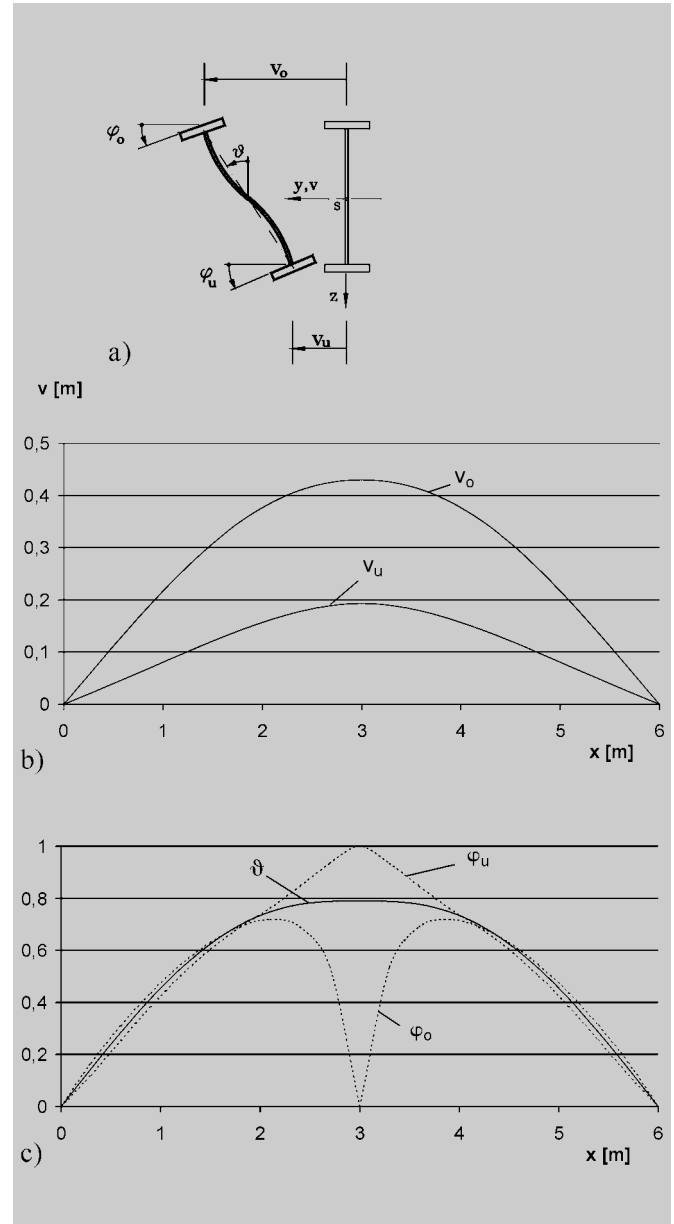


**Bild 4.** Trägersystem; a) Perspektive, b) Schnitt durch die Ausweichfigur  
**Fig. 4.** System of beams; a) perspective, b) figure of deformation



**Bild 5.** Verzweigungslasten  $q_{Ki}$  in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit  $C_{xx}$  [kNm]  
**Fig. 5.** Buckling loads  $q_{Ki}$  dependent on spring stiffness  $C_{xx}$  [kNm]

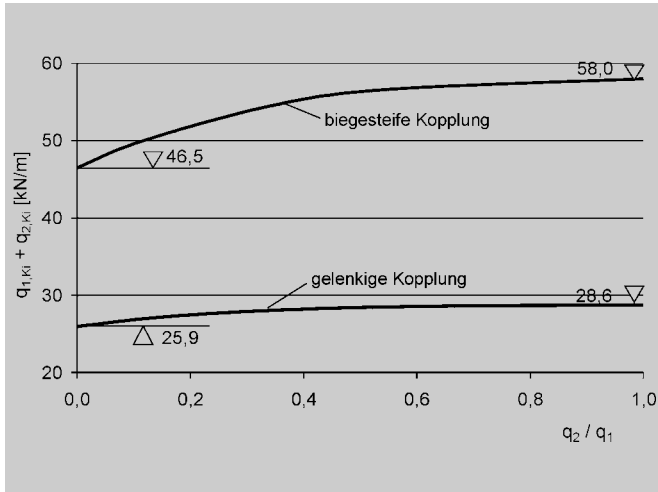
metrischen Verlauf. Dagegen zeigt die Kurve  $q_{Ki}$ , die unter Einbeziehung der Querschnittsverformungen bestimmt wurde, einen stetigen Verlauf. Die Eigenform ist für beliebige Federsteifigkeiten symmetrisch (Bild 6).



**Bild 6.** Verzweigungsfigur für  $C_{xx} = \infty$ ;  
a) Bezeichnungen, b) seitliche Gurtverschiebungen, c) Träger- und Gurtverdrehungen  
**Fig. 6.** Buckling deformations for  $C_{xx} = \infty$ ; a) notation, b) lateral flange displacement, c) rotations of beam and flanges

Bild 7 enthält eine Gegenüberstellung der Verzweigungslasten der Trägersysteme nach Bild 2a (gelenkige Kopplung) und Bild 4 (biegesteife Kopplung). Beim System nach Bild 4 wurde ein Querträger IPE100 mit 3 m Spannweite zugrunde gelegt. Die Verzweigungslasten wurden durch eine lineare Stabilitätsanalyse unter Verwendung der Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung bestimmt.

Für das System mit biegesteifer Kopplung ergeben sich, bedingt durch die drehelastische Einspannung, insgesamt wesentlich höhere Verzweigungslasten. Der Einfluß einer ungleichen Lastverteilung macht sich stärker bemerkbar als bei einer gelenkigen Kopplung. Beim Belastungsverhältnis  $q_2/q_1 = 0$  liegt  $q_{1,Ki}$  mit 46,5 kN/m 60 % über der Verzweigungslast des drehelastisch gestützten Einzelträgers ( $46,5/29,0 - 1 = 0,6$ ).



**Bild 7.** Verzweigungslasten gekoppelter Biegeträger in Abhängigkeit vom Belastungsverhältnis  $q_2/q_1$   
**Fig. 7.** Buckling loads of coupled beams dependent on load relation  $q_2/q_1$

**3 Theoretische Behandlung und Näherungslösungen**  
**3.1 Inhaltsübersicht und Bezeichnungen**

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Verzweigungslasten von in Querrichtung gekoppelten Trägersystemen aufgezeigt. Mit den Verzweigungslasten können vereinfachte Biegedrillknicknachweise auf der Grundlage der DIN 18800 T. 2 [2] oder dem Eurocode 3 [3] geführt werden.

Abschnitt 3.2 behandelt theoretische Grundlagen zur Berechnung gelenkig gekoppelter Trägersysteme mit Hilfe von Matrizenformulierungen. Es wird die Berücksichtigung dehnstarrer Verbindungen über kinematische Zwangsbedingungen und die Erfassung elastischer Verbindungen über Kopplungsmatrizen beschrieben. Die Verbindungen können an diskreten Stellen oder kontinuierlich erfolgen.

Im Abschnitt 3.3 wird erläutert, wie man durch diskrete Drehfedern oder Drehbettungen näherungsweise den Einfluß biegesteifer Kopplungen erfassen kann. Es werden Hinweise zur Bestimmung der Drehfeder- und Bettungssteifigkeiten gegeben.

Aufbauend auf den Grundlagen des Abschnitts 3.2 werden im Abschnitt 3.4 Näherungsformeln und Diagramme für Standardsysteme angegeben, die eine schnelle Ermittlung der Biegedrillknicklasten ermöglichen.

Schließlich erfolgt im Abschnitt 3.5 die Beschreibung von Verfahren, mit denen man unter Verwendung von Programmen für Einfeld- und Durchlaufträger die Biegedrillknicklast dehnstarr gekoppelter Trägersysteme ermitteln kann.

**Bezeichnungen**

E	Elastizitätsmodul
$\mu$	Querdehnung
S	Schwerpunkt
M	Schubmittelpunkt
$t_s$	Stegdicke
$h_s$	Steghöhe im Profilmittellinienmodell
b	reduzierte Steghöhe
$EI_z$	Biegesteifigkeit um die z-Achse

$EC_M$	Wölbesteifigkeit bezogen auf den Schubmittelpunkt
$GI_T$	St. Venantsche Torsionssteifigkeit
$GI_{T,G}$	St. Venantsche Torsionssteifigkeit des Trägergurtes
K	Plattensteifigkeit
$z_M$	Abstand des Schubmittelpunktes vom Schwerpunkt
$i_M$	Trägheitsradius bezogen auf den Schubmittelpunkt
	$i_M = \sqrt{i_y^2 + i_z^2 + z_M^2}$
$r_{M_y}$	Drehradius für Biegemomente $M_y$
	$r_{M_y} = \frac{1}{I_y} \cdot \int_A (y^2 + z^2) \cdot z \cdot dA - 2 \cdot z_M$
$z_q, z_F$	Abstände der Lastangriffspunkte von Querlasten $q_z$ bzw. Einzellasten $F_z$ vom Schwerpunkt in z-Richtung
$z_K$	Abstand der Kopplung vom Schwerpunkt in z-Richtung
$x_K$	Koordinate der diskreten Kopplung in Stablängsrichtung
$c_\vartheta$	Drehbettung
$c_\varphi$	Drehbettung des Trägergurtes durch den Steg
$c_K$	Dehnfedersteifigkeit von kontinuierlichen Kopplungen
$S^*$	Schubfeldsteifigkeit
$C_\vartheta$	Drehfedersteifigkeit
$C_K$	Dehnfedersteifigkeit von diskreten Kopplungen
$F_K$	Kopplungskraft
$q_K$	Kopplungskraft je Längeneinheit
j	Variable für die Nummer eines Trägers
$\eta$	Lastfaktor
$\eta_{ki}$	kritischer Lastfaktor bis zum Erreichen der Verzweigungslast

**3.2 Berechnung gelenkig gekoppelter Träger mit Hilfe von Matrizenformulierungen**

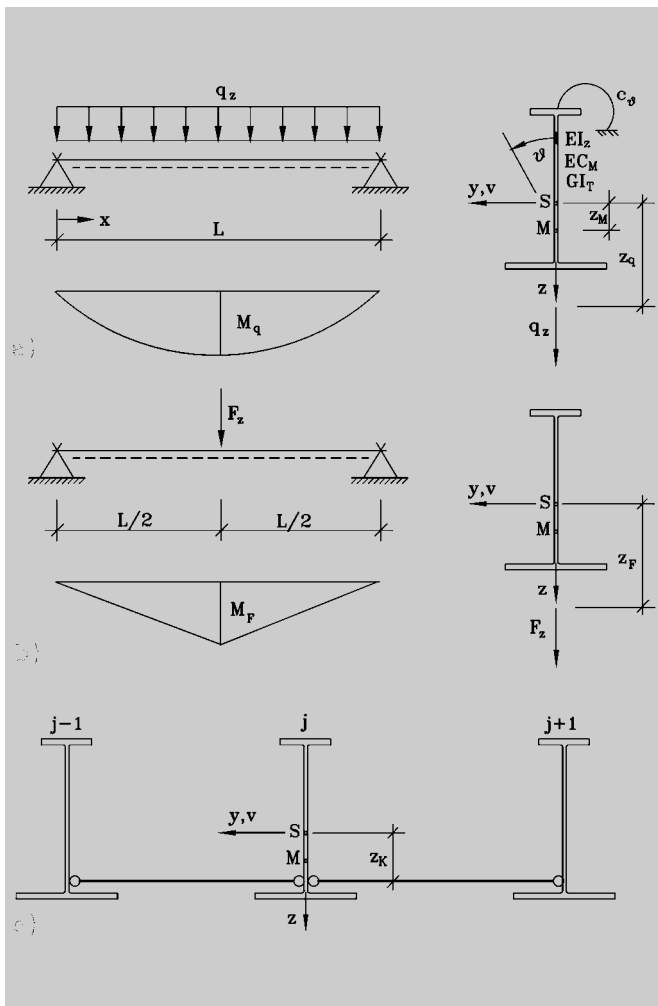
**3.2.1 Allgemeines**

Mit Hilfe geeigneter Matrizenformulierungen ist die Berechnung allgemeiner Trägersysteme mit beliebigen Querschnitten, Lagerungen und Kopplungen möglich. Dazu werden zum einen Steifigkeitsmatrizen benötigt, mit denen das Tragverhalten der Träger ausreichend genau beschrieben wird. Zum anderen müssen Kopplungsbedingungen formuliert werden, die den Einfluß von elastischen oder dehnstarrten Kopplungen erfassen. Mit dem Zusammenfügen der Trägersteifigkeitsmatrizen zu Systemsteifigkeitsmatrizen und dem Einarbeiten der Kopplungsbedingungen erhält man Gleichungssysteme zur Bestimmung der Verzweigungslasten. Die Behandlung von Spannungsproblemen ist durch die Berücksichtigung entsprechender Lastvektoren möglich.

In den folgenden Abschnitten wird die Vorgehensweise für Systeme mit gelenkiger Kopplung und parallel zueinander verlaufenden Trägern beschrieben. Die Herleitung der erforderlichen Steifigkeitsmatrizen erfolgt auf der Grundlage der Energiemethode unter Anwendung des Ritzschen Verfahrens. Dabei werden linear elastische Werkstoffgesetze, kleine Verformungen und richtungstreue Kräfte vorausgesetzt.

Ausgangspunkt zur Herleitung von Steifigkeitsmatrizen nach dem Ritzschen Verfahren ist das Potential (Variationsfunktional) des zugrunde liegenden mechanischen Problems. Die darin enthaltenen Verformungen werden durch Näherungsfunktionen beschrieben, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen und mit denen die zu erwartenden Verformungen hinreichend genau erfaßt werden. Durch Variation des Potentials nach den Ansatzfreiwerten erhält man die gesuchten Steifigkeitsmatrizen.

Um zu einer übersichtlichen und einfachen Darstellung zu gelangen, werden die Steifigkeitsmatrizen und Kopplungsbedingungen exemplarisch für gabelgelagerte Einfeldträger mit symmetrischer Belastung hergeleitet (s. Bild 8). In diesem Fall können die Verformungen in guter Näherung durch Sinusansätze mit ungerader Halbwellenzahl beschrieben werden. Das Aufstellen der Matrizen und die Lösung der Gleichungssysteme ist mit programmierbaren Taschenrechnern, Mathematik- oder Tabellenkalkulationsprogrammen möglich. Bei Durchlaufträgern, asymmetrischen Belastungen oder Lagerungsbedingungen werden andere Verformungsansätze erforderlich. Die Vorgehensweise ist jedoch identisch. Die Berechnung allgemeiner Systeme ist mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung bereichsweiser Ritzansätze möglich (siehe hierzu [4]).



**Bild 8.** Systeme mit Bezeichnungen  
**Fig. 8.** Systems with notation

### 3.2.2 Trägersteifigkeitsmatrizen

Zur Berechnung von Trägern mit einfachsymmetrischem Querschnitt nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung kann die erste Variation des Potentials z. B. [5] entnommen werden. Im elastischen Potential werden hier neben der Biege- und Torsionssteifigkeit des Trägers auch noch eine drehelastische Bettung und diskrete Drehfedern berücksichtigt (s. Gl. (2)). Mit diesen zusätzlichen Anteilen kann der Einfluß der Drehbehinderung bei Trägersystemen mit biegesteifer Kopplung näherungsweise erfaßt werden (s. Abschn. 3.3):

$$\delta\Pi^{\text{Tr}} = \delta\Pi_e^{\text{Tr}} + \delta\Pi_g^{\text{Tr}} \quad (1)$$

$$\delta\Pi_e^{\text{Tr}} = \int_L [EI_z \cdot v_M'' \cdot \delta v_M'' + EC_M \cdot \vartheta'' \cdot \delta \vartheta'' + GI_T \cdot \vartheta' \cdot \delta \vartheta' + c_\vartheta \cdot \vartheta \cdot \delta \vartheta] \cdot dx + \sum_i C_{\vartheta,i} \cdot \vartheta(x_i) \cdot \delta \vartheta(x_i) \quad (2)$$

$$\delta\Pi_g^{\text{Tr}} = \int_L [M_y \cdot (r_{M_y} \cdot \vartheta' \cdot \delta \vartheta' + v_M'' \cdot \delta \vartheta + \vartheta \cdot \delta v_M'') + q_z \cdot (z_q - z_M) \cdot \vartheta \cdot \delta \vartheta] \cdot dx + \sum_i F_{z,i} \cdot (z_{F,i} - z_M) \cdot \vartheta(x_i) \cdot \delta \vartheta(x_i) \quad (3)$$

Im geometrischen Potential (s. Gl. (3)) ist der Einfluß der Biegemomente  $M_y$  und der Querlasten in z-Richtung enthalten. Weitere Anteile werden in diesem Zusammenhang nicht berücksichtigt. Die Momentenverläufe nach Bild 8 entsprechen den Funktionen der Gln. (4) und (5):

#### Lastfall $q_z$

$$M_y(x) = M_q \cdot 4 \cdot \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad \text{mit} \quad M_q = \frac{q_z \cdot L^2}{8} \quad (4)$$

#### Lastfall $F_z$

$$M_y(x) = M_F \cdot 2 \cdot \frac{x}{L} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M_y(x) = M_F \cdot 2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad L/2 \leq x \leq L \quad (5)$$

mit  $M_F = \frac{F_z \cdot L}{4}$

Die Verformungen  $v_M$  und  $\vartheta$  werden durch zweigliedrige Sinusansätze mit ungerader Halbwellenzahl beschrieben (s. oben).

$$v_{M,j}(x) = v_{j,1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) + v_{j,2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (6)$$

$$\vartheta_j(x) = \vartheta_{j,1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) + \vartheta_{j,2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (7)$$

Damit wird vorausgesetzt, daß die Verzweigungsfigur der Träger symmetrisch ist. Liegen hohe Drehfeder- oder Bettungssteifigkeiten vor, werden einzelne belastete Träger durch eine große Anzahl unbelasteter Träger gestützt, oder sind Kopplungen von Trägern nicht symmetrisch zur Trägermitte angeordnet, so können sich auch antimetrische oder asymmetrische Eigenformen einstellen (s. hierzu Abs. 2.3 und 3.5). In diesen Fällen müssen zusätzlich Sinusreihenglieder mit gerader Halbwellenzahl berücksichtigt werden.

Für den Fall, daß in Feldmitte eine Einzellast und eine diskrete Drehfeder vorliegen, erhält man nach Einsetzen der Gln. (4) bis (6) in die Gln. (2) und (3) und anschließender Integration die Steifigkeitsmatrizen Gln. (8) bis (10):

$$\mathbf{k}_{e,j}^{\text{Tr}} = \begin{array}{c|cc|cc} & v_{j,1} & v_{j,2} & \vartheta_{j,1} & \vartheta_{j,2} \\ \hline c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 81 \cdot c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & c_2 + c_3 + c_4 + c_5 & & -c_5 \\ \hline \text{Symmetrie} & & & 81 \cdot c_2 + 9 \cdot c_3 + c_4 + c_5 & \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

mit

$$c_1 = \frac{EI_z \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} \quad c_2 = \frac{EC_M \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} \quad c_3 = \frac{GI_T \cdot \pi^2}{2 \cdot L}$$

$$c_4 = c_\vartheta \cdot \frac{L}{2} \quad c_5 = C_\vartheta$$

**Lastfall  $q_z$**  (s. Bild 8a)

$$\mathbf{k}_{g,j}^{\text{Tr}} = \begin{array}{c|cc|cc} & v_{j,1} & v_{j,2} & \vartheta_{j,1} & \vartheta_{j,2} \\ \hline 0 & 0 & -g_1 \cdot (1 + \pi^2/3) & g_1 \cdot 3/4 \\ \hline & 0 & g_1 \cdot 27/4 & -g_1 \cdot (1 + 3 \cdot \pi^2) \\ \hline & & -g_2 \cdot (1 - \pi^2/3) + g_3 & -g_2 \cdot 15/4 \\ \hline \text{Symmetrie} & & & -g_2 \cdot (1 - 3 \cdot \pi^2) + g_3 \\ \hline \end{array} \quad (9)$$

mit

$$g_1 = \frac{M_q}{L} \quad g_2 = \frac{M_q \cdot r_{My}}{L} \quad g_3 = q_z \cdot (z_q - z_M) \cdot \frac{L}{2}$$

**Lastfall  $F_z$**  (s. Bild 8b)

$$\mathbf{k}_{g,j}^{\text{Tr}} = \begin{array}{c|cc|cc} & v_{j,1} & v_{j,2} & \vartheta_{j,1} & \vartheta_{j,2} \\ \hline 0 & 0 & -g_4 \cdot (1 + \pi^2/4) & g_4 \\ \hline & 0 & g_4 \cdot 9 & -g_4 \cdot (1 + 9 \cdot \pi^2/4) \\ \hline & & -g_5 \cdot (1 - \pi^2/4) + g_6 & -g_5 \cdot 3 - g_6 \\ \hline \text{Symmetrie} & & & -g_5 \cdot (1 - 9 \cdot \pi^2/4) + g_6 \\ \hline \end{array} \quad (10)$$

mit

$$g_4 = \frac{M_F}{L} \quad g_5 = \frac{M_F \cdot r_{My}}{L} \quad g_6 = F_z \cdot (z_F - z_M)$$

### 3.2.3 Kopplungsbedingungen

#### 3.2.3.1 Dehnstarre Kopplungen

Die Berücksichtigung dehnstarrer Kopplungen zwischen benachbarten Trägern erfolgt über kinematische Zwangsbedingungen. In Verbindung mit den Verformungsansätzen der Träger lassen sich daraus Beziehungen zwischen den Ansatzfreiwerten ableiten, die in die Steifigkeitsmatrizen der Trägersysteme einzuarbeiten sind.

Unter der Voraussetzung der Querschnittstreue gilt für die seitliche Verschiebung  $v$  eines Trägers an einer beliebigen Stelle  $x, z$  die Beziehung (11):

$$\mathbf{396} \quad v(x, z) = v_M(x) - \vartheta(x) \cdot (z - z_M) \quad (11)$$

#### Kopplungsbedingung für diskrete Verbindungen von Trägern

Bei diskreten dehnstarken Verbindungen benachbarter Träger sind die seitlichen Verschiebungen an den Kopplungsstellen gleich. Mit den Gln. (11) und (12) erhält man für die Träger  $j$  und  $j + 1$  die Zwangsbedingung Gl. (13):

$$[v(x_K, z_K)]_j = [v(x_K, z_K)]_{j+1} \quad (12)$$

$$[v_M(x_K) - \vartheta(x_K) \cdot (z_K - z_M)]_j - [v_M(x_K) - \vartheta(x_K) \cdot (z_K - z_M)]_{j+1} = 0 \quad (13)$$

Für Träger mit gleichem Querschnitt und einer Verbindung in Feldmitte ( $z_{M,j} = z_{M,j+1} = z_M, z_{K,j} = z_{K,j+1} = z_K, s.$  Bilder 2a, 2b und 8c) ergibt sich mit den Verformungsansätzen (6) und (7) die Beziehung zwischen den Ansatzfreiwerten Gl. (14):

$$[v_{j,1} - v_{j,2} - (\vartheta_{j,1} - \vartheta_{j,2}) \cdot (z_K - z_M)] - [v_{j+1,1} - v_{j+1,2} - (\vartheta_{j+1,1} - \vartheta_{j+1,2}) \cdot (z_K - z_M)] = 0 \quad (14)$$

#### Kopplungsbedingungen für eine kontinuierliche Verbindung von Trägern

Durch eine kontinuierliche dehnstarre Verbindung ist die seitliche Verschiebung benachbarter Träger in der Höhe der Kopplung über die gesamte Trägerlänge gleich:

$$[v(x, z_K)]_j = [v(x, z_K)]_{j+1} \quad (15)$$

$$[v_M(x) - \vartheta(x) \cdot (z_K - z_M)]_j - [v_M(x) - \vartheta(x) \cdot (z_K - z_M)]_{j+1} = 0 \quad (16)$$

Die Anzahl kinematischer Zwangsbedingungen, die aus Gl. (16) abzuleiten sind, entspricht der Anzahl der Freiwerte eines Trägers für  $v_M$  bzw.  $\vartheta$ . Ihre Formulierung kann dadurch erfolgen, daß Gl. (16) an geeigneten Trägerstellen  $x$  angeschrieben wird. Geeignet sind die Stellen dann, wenn die daraus hervorgehenden Zwangsbedingungen linear unabhängig voneinander sind. Zweckmäßiger ist jedoch eine formale Herleitung der Zwangsbedingungen im Sinne einer Fehlerquadratminimierung:

$$\int_L \{ [v_M(x) - \vartheta(x) \cdot (z_K - z_M)]_j - [v_M(x) - \vartheta(x) \cdot (z_K - z_M)]_{j+1} \}^2 \cdot dx \equiv \text{Min} \quad (17)$$

Die Variation von Gl. (17) z. B. nach den Freiwerten  $v_{j,i}$  liefert die Beziehung zwischen den Ansatzfreiwerten benachbarter Träger. Für Träger mit gleichem Querschnitt erhält man mit den Verformungsansätzen (6) und (7) die Bedingungen Gln. (18a–b):

$$[v_{j,1} - \vartheta_{j,1} \cdot (z_K - z_M)] - [v_{j+1,1} - \vartheta_{j+1,1} \cdot (z_K - z_M)] = 0$$

$$[v_{j,2} - \vartheta_{j,2} \cdot (z_K - z_M)] - [v_{j+1,2} - \vartheta_{j+1,2} \cdot (z_K - z_M)] = 0 \quad (18a–b)$$

Die Anteile der Verformungsansätze mit gleicher Halbwellenzahl erfüllen jeweils Gl. (16).

**3.2.3.2 Elastische Kopplungen**

Können die Bauteile, die benachbarte Träger miteinander verbinden, nicht mehr als dehnstarr behandelt werden, oder ist die Nachgiebigkeit ihrer Anschlüsse von Bedeutung, sind elastische Kopplungsbedingungen zu formulieren (Bild 9). Aus den Federgesetzen für die Kopplungskräfte lassen sich in Verbindung mit den Verformungsansätzen der Träger Steifigkeitsmatrizen ableiten, die in der elastischen Steifigkeitsmatrix des Trägersystems zu berücksichtigen sind.

**Kopplungsmatrizen für diskrete elastische Verbindungen von Trägern**

$$F_{K,j-j+1} = C_K \cdot \{ [v(x_K, z_K)]_j - [v(x_K, z_K)]_{j+1} \} \quad (19)$$

$$\delta \Pi_{j-j+1}^{K_0} = C_K \cdot \{ [v(x_K, z_K)]_j - [v(x_K, z_K)]_{j+1} \} \times \{ [\delta v(x_K, z_K)]_j - [\delta v(x_K, z_K)]_{j+1} \} \quad (20)$$

Bei Trägern mit gleichem Querschnitt und einer Verbindung in Feldmitte erhält man mit den Verformungsansätzen Gln. (6) und (7) die Kopplungsmatrix Gl. (21):

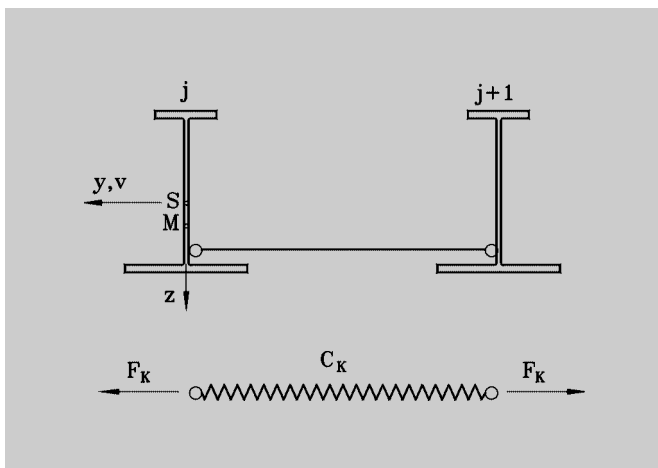
	$v_{j,1}$	$v_{j,2}$	$\vartheta_{j,1}$	$\vartheta_{j,2}$	$v_{j+1,1}$	$v_{j+1,2}$	$\vartheta_{j+1,1}$	$\vartheta_{j+1,2}$
$k_{e,j-j+1}^{K_0} =$	$c_6$	$-c_6$	$-c_7$	$c_7$	$-c_6$	$c_6$	$c_7$	$-c_7$
		$c_6$	$c_7$	$-c_7$	$c_6$	$-c_6$	$-c_7$	$c_7$
			$c_8$	$-c_8$	$c_7$	$-c_7$	$-c_8$	$c_8$
				$c_8$	$-c_7$	$c_7$	$c_8$	$-c_8$
					$c_6$	$-c_6$	$-c_7$	$c_7$
						$c_6$	$c_7$	$-c_7$
							$c_8$	$-c_8$
								$c_8$

Symmetrie (21)

$$c_6 = C_K \quad c_7 = C_K \cdot (z_K - z_M) \quad c_8 = C_K \cdot (z_K - z_M)^2$$

**Kopplungsmatrizen für kontinuierliche elastische Verbindungen von Trägern**

Liegt eine kontinuierliche elastische Verbindung von zwei Trägern vor, entspricht der zu berücksichtigende



**Bild 9.** Ersatz der Koppelstäbe und deren Verbindungen durch Federn  
**Fig. 9.** Replacement of coupling links by springs

Potentialanteil dem Integral über die Arbeit der Kopplungskraft  $q_K$  an den virtuellen Differenzverschiebungen (s. Gl. (23)):

$$q_{K,j-j+1}(x) = c_K \cdot \{ [v(x, z_K)]_j - [v(x, z_K)]_{j+1} \} \quad (22)$$

$$\delta \Pi_{j-j+1}^{K_0} = c_K \cdot \int_L \{ [v(x, z_K)]_j - [v(x, z_K)]_{j+1} \} \times \{ [\delta v(x, z_K)]_j - [\delta v(x, z_K)]_{j+1} \} \cdot dx \quad (23)$$

Bei Trägern mit gleichem Querschnitt erhält man mit den Verformungsansätzen Gln. (6) und (7) die Kopplungsmatrix Gl. (24):

	$v_{j,1}$	$v_{j,2}$	$\vartheta_{j,1}$	$\vartheta_{j,2}$	$v_{j+1,1}$	$v_{j+1,2}$	$\vartheta_{j+1,1}$	$\vartheta_{j+1,2}$
$k_{e,j-j+1}^{K_0} =$	$c_9$	0	$-c_{10}$	0	$-c_9$	0	$c_{10}$	0
		$c_9$	0	$-c_{10}$	0	$-c_9$	0	$c_{10}$
			$c_{11}$	0	$c_{10}$	0	$-c_{11}$	0
				$c_{11}$	0	$c_{10}$	0	$-c_{11}$
					$c_9$	0	$-c_{10}$	0
						$c_9$	0	$-c_{10}$
							$c_{11}$	0
								$c_{11}$

Symmetrie (24)

$$c_9 = c_K \cdot \frac{L}{2} \quad c_{10} = c_K \cdot \frac{L}{2} \cdot (z_K - z_M)$$

$$c_{11} = c_K \cdot \frac{L}{2} \cdot (z_K - z_M)^2$$

**Kopplungsmatrizen für nachgiebige Verbindungen von Trägern an durchgehenden dehnstarrten Stäben**

Schließen mehr als zwei Träger über nachgiebige Verbindungen an dehnstarre Stäbe an (Bild 10), können die zu übertragenden Kräfte nicht mehr über die Relativverschiebungen benachbarter Träger ermittelt werden. In diesem Fall müssen Ansatzfreiwerte für die Verschiebungen der Verbindungsstäbe eingeführt werden. In den Federgesetzen für die Anschlußkräfte sind die Relativverschiebungen zwischen den Trägern und den Verbindungsstäben zu berücksichtigen.

$$F_{K,j-B} = C_K \cdot \{ [v(x_K, z_K)]_j - v_B \} \quad (25)$$

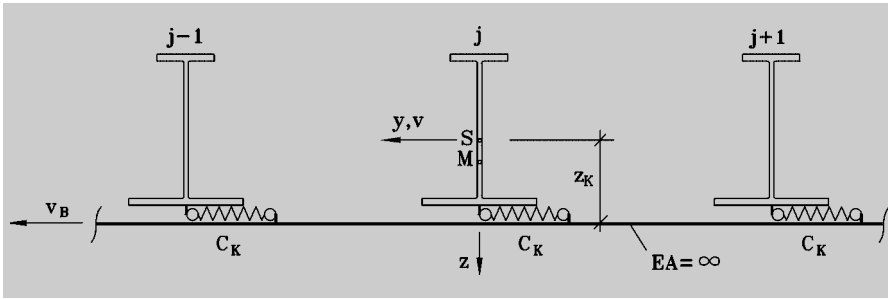
$$\delta \Pi_{j-B}^{K_0} = C_K \cdot \{ [v(x_K, z_K)]_j - v_B \} \cdot \{ [\delta v(x_K, z_K)]_j - \delta v_B \} \quad (26)$$

Bei einer Kopplung in Feldmitte erhält man mit den Verformungsansätzen Gln. (6) und (7) für den Träger j die Matrix Gl. (27):

	$v_{j,1}$	$v_{j,2}$	$\vartheta_{j,1}$	$\vartheta_{j,2}$	$v_B$
$k_{e,j-B}^{K_0} =$	$c_6$	$-c_6$	$-c_7$	$c_7$	$-c_6$
		$c_6$	$c_7$	$-c_7$	$c_6$
			$c_8$	$-c_8$	$c_7$
				$c_8$	$-c_7$
					$c_6$

Symmetrie (27)

$c_6, c_7, c_8$  siehe Gl. (21).



**Bild 10.** Nachgiebige Verbindung von Trägern an einen durchgehenden dehnstarrsten Stab

**Fig. 10.** Elastic connection of beams at a continuous axial rigid bar

**Kopplungsmatrizen für nachgiebige Verbindungen von Trägern an durchgehenden dehnstarrsten Scheiben**

Bei nachgiebigen Verbindungen mit Scheiben, die senkrecht zur Trägerachse als dehnstarr betrachtet werden können (s. Bild 10), ergeben sich die Kopplungskraft  $Q_K$  und das Potential analog zu den Gln. (22) und (23) zu

$$Q_{K,j-B}(x) = c_K \cdot \{ [v(x, z_K)]_j - v_B(x) \}, \tag{28}$$

$$\delta \Pi_{j-B}^{K_0} = c_K \cdot \int_L \{ [v(x, z_K)]_j - v_B(x) \} \times \{ [\delta v(x, z_K)]_j - \delta v_B(x) \} \cdot dx. \tag{29}$$

Wählt man für die Scheibenverschiebung  $v_B(x)$  ebenfalls einen zweigliedrigen Sinusansatz mit ungeraden Halbwellenzahlen (s. Gln. (6) und (7))

$$v_B(x) = v_{B,1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) + v_{B,2} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{L}\right), \tag{30}$$

erhält man damit zur Erfassung der Anschlusnachgiebigkeit eines Trägers  $j$  die Kopplungsmatrix Gl. (31):

	$v_{j,1}$	$v_{j,2}$	$\vartheta_{j,1}$	$\vartheta_{j,2}$	$v_{B,1}$	$v_{B,2}$
$\mathbf{k}_{e,j-B}^{K_0} =$	$c_9$	0	$-c_{10}$	0	$-c_9$	0
		$c_9$	0	$-c_{10}$	0	$-c_9$
			$c_{11}$	0	$c_{10}$	0
				$c_{11}$	0	$c_{10}$
					$c_9$	0
						$c_9$

(31)

$c_9, c_{10}, c_{11}$  siehe Gl. (24).

Ist die Schubsteifigkeit der Scheibe von Bedeutung, kann dies mit einer weiteren Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden. Mit dem Verschiebungsansatz Gl. (30) ergibt sich die Matrix Gl. (33):

$$\delta \Pi^{S^*} = \int_L T_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy} \cdot dx = \int_L S^* \cdot v_B \cdot \delta v_B \cdot dx \tag{32}$$

	$v_{B,1}$	$v_{B,2}$
$\mathbf{k}_e^{S^*} =$	$c_{12}$	0
	0	$9 \cdot c_{12}$

(33)

**398** mit  $c_{12} = \frac{S^* \cdot \pi^2}{2 \cdot L}$

**3.2.4 Aufstellen der Systemsteifigkeitsmatrizen**

Zur Formulierung des Verzweigungsproblems gekoppelter Trägersysteme gemäß Gl. (34) müssen zunächst die elastische und geometrische Systemsteifigkeitsmatrix bestimmt werden:

$$(\mathbf{K}_e + \eta_{Ki} \cdot \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{U}_{Ki} = 0 \tag{34}$$

Das Aufstellen der Systemsteifigkeitsmatrizen, die dem Verbund der Matrizen der einzelnen Strukturelemente (hier Träger, elastische Kopplungen und Schubfelder) entsprechen, erfolgt üblicherweise nach der direkten Steifigkeitsmethode ([6]). Dazu ist zunächst der Vektor der Systemfreiwerte festzulegen, in dem sämtliche Freiwerte der Strukturelemente, ggf. bezogen auf ein globales Koordinatensystem, zusammengefaßt sind. Im Anschluß erfolgt das Zusammenfügen der Elementmatrizen zu Systemsteifigkeitsmatrizen. Die Zuordnung der Steifigkeitsbeiträge ergibt sich aus der Beziehung zwischen den Element- und Systemfreiwerten. Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Systems, bestehend aus drei Trägern mit elastischen Kopplungen (vgl. Bild 8c), verdeutlicht:

Die Zuordnung der Steifigkeitsbeiträge ergibt sich aus der Beziehung zwischen den Element- und Systemfreiwerten. Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Systems, bestehend aus drei Trägern mit elastischen Kopplungen (vgl. Bild 8c), verdeutlicht:

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \mathbf{u}_3^T] = [v_{1,1}, v_{1,2}, \vartheta_{1,1}, \vartheta_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \vartheta_{2,1}, \vartheta_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}, \vartheta_{3,1}, \vartheta_{3,2}]$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^{Tr} + \mathbf{K}_e^{K_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e,1}^{Tr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{e,2}^{Tr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{e,3}^{Tr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e,1-2}^{K_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{e,2-3}^{K_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_g^{Tr} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{g,1}^{Tr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{g,2}^{Tr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{g,3}^{Tr} \end{bmatrix}$$

Liegen starre Kopplungen vor, gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Berücksichtigung der daraus resultierenden kinematischen Zwangsbedingungen. Eine besteht in der Transformation der Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_e^{Tr}$  und  $\mathbf{K}_g^{Tr}$  auf unabhängige Systemfreiwerte. Die dazu notwendige Transformationsmatrix erhält man, indem man unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen eine Beziehung zwischen allen Systemfreiwerten  $\mathbf{U}$  und den unabhängigen Systemfreiwerten  $\bar{\mathbf{U}}$  formuliert:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{U}} \tag{35}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_e^{Tr} \cdot \mathbf{T}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_g^{Tr} \cdot \mathbf{T} \tag{36a-b}$$

Werden z. B. zwei gleiche Träger kontinuierlich miteinander verbunden, ergibt sich mit den Gln. (18a-b) die folgende Transformationsbeziehung:



$$\begin{matrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ \vartheta_{1,1} \\ \vartheta_{1,2} \\ v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ \vartheta_{2,1} \\ \vartheta_{2,2} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -z_K + z_M & 0 & z_K - z_M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_K + z_M & 0 & z_K - z_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ \vartheta_{1,1} \\ \vartheta_{1,2} \\ v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ \vartheta_{2,1} \\ \vartheta_{2,2} \end{matrix}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{U}}$$

Die Freiwerte  $v_{2,1}$  und  $v_{2,2}$  in  $\mathbf{U}$  sind hier als abhängig definiert. Die Lösung des Verzweigungsproblems Gl. (34) erfolgt mit den transformierten Steifigkeitsmatrizen  $\bar{\mathbf{K}}_e$  und  $\bar{\mathbf{K}}_g$ .

Eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung kinematischer Zwangsbedingungen ist mit dem Penalty- oder Strafverfahren gegeben. Die Anwendung dieses Verfahrens läuft bei der vorliegenden Aufgabenstellung darauf hinaus, daß man zunächst elastische Kopplungsbedingungen entsprechend dem vorangegangenen Abschnitt formuliert und durch Auswahl ausreichend hoher Federsteifigkeiten starre Kopplungen erzeugt. Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß die Ordnung der Systemsteifigkeitsmatrizen aufgrund kinematischer Zwangsbedingungen nicht verändert wird.

Abschließend sei noch auf die Methode der Lagrange-schen Multiplikatoren hingewiesen. Bei dieser Methode werden die kinematischen Zwangsbedingungen direkt in die Variationsformulierung mit aufgenommen. Für das System aus zwei gleichen Trägern mit einer kontinuierlichen Verbindung erhält man folgenden Potentialausdruck:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi = & \delta \Pi^{\text{Tr},1} + \delta \Pi^{\text{Tr},2} + \\
 & + \delta \gamma_1 \cdot \{ [v_{1,1} - \vartheta_{1,1} \cdot (z_K - z_M)] - \\
 & - [v_{2,1} - \vartheta_{2,1} \cdot (z_K - z_M)] \} + \\
 & + \gamma_1 \cdot \{ [\delta v_{1,1} - \delta \vartheta_{1,1} \cdot (z_K - z_M)] - \\
 & - [\delta v_{2,1} - \delta \vartheta_{2,1} \cdot (z_K - z_M)] \} + \\
 & + \delta \gamma_2 \cdot \{ [v_{1,2} - \vartheta_{1,2} \cdot (z_K - z_M)] - \\
 & - [v_{2,2} - \vartheta_{2,2} \cdot (z_K - z_M)] \} + \\
 & + \gamma_2 \cdot \{ [\delta v_{1,2} - \delta \vartheta_{1,2} \cdot (z_K - z_M)] - \\
 & - [\delta v_{2,2} - \delta \vartheta_{2,2} \cdot (z_K - z_M)] \}
 \end{aligned}$$

Die Multiplikatoren  $\gamma_i$  sind zusätzliche freie Variablen, um die der Vektor der Systemfreiwerte ergänzt wird. Sie haben die Dimension einer Kraft und können bei einem Spannungsproblem zur Rückrechnung der Kopplungskräfte verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{U}}^T = & [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \boldsymbol{\gamma}^T] \\
 = & [v_{1,1}, v_{1,2}, \vartheta_{1,1}, \vartheta_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \vartheta_{2,1}, \vartheta_{2,2}, \gamma_1, \gamma_2]
 \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung  $\mathbf{Z}$  für die Matrix, in der die Koeffizienten der kinematischen Zwangsbedingungen sortiert nach den Freiwerten zusammengefaßt sind, ergeben sich aus dem Potential für das Beispiel folgende Matrixausdrücke:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \begin{matrix} \mathbf{k}_{e,1}^{\text{Tr}} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{e,2}^{\text{Tr}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{matrix} \mathbf{k}_{g,1}^{\text{Tr}} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{g,2}^{\text{Tr}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix}$$

Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren ermöglicht in einfacher Weise die Berücksichtigung kinematischer Zwangsbedingungen. Der Arbeitsaufwand verlagert sich auf die Lösung des entstehenden Gleichungssystems. Die Anwendung wird im Abschnitt 4 gezeigt.

### 3.3 Berücksichtigung biegesteifer Kopplungen

#### 3.3.1 Allgemeines

Bei trägerrostartigen Systemen mit biegesteifen Verbindungen von Längs- und Querträgern (s. Bild 4) stellen sich u. a. folgende Tragwirkungen ein:

1. Die seitlichen Verschiebungen der Längsträger sind nicht mehr unabhängig voneinander. Bei ungleicher Belastung stützen die weniger belasteten Träger die stärker belasteten (s. Abschn. 1 und Abschn. 2.2).
2. An den Verbindungsstellen sind die Tangentenverdrehungen der Querträger und die Axialverdrehungen der Längsträgergurte annähernd gleich (s. Bild 4). In bezug auf die räumliche Stabilität wirken die Querträger wie drehelastische Einspannungen auf die Längsträger (s. Abschn. 2.3). Stellen sich jedoch aufgrund der Belastung Tangentenverdrehungen über den Längsträgern ein (s. Bild 4), werden letztere auch ohne den Ansatz von Vorkrümmungen  $v_0$  räumlich verformt. Es liegt damit kein Verzweigungsproblem, sondern ein Spannungsproblem vor.

3. Schließen mehr als zwei Längsträger an einen durchlaufenden Querträger an, ist bei ungleicher Belastung die lastverteilende Wirkung des Querträgers unter Umständen von Bedeutung. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Biegesteifigkeit des Querträgers groß und der Längsträgerabstand klein ist. Die lastverteilende Wirkung ist bei Trägern mit dünnwandigem offenen Querschnitt nur in geringem Maße davon abhängig, ob die Verbindungen zwischen Quer- und Längsträgern biegesteif oder gelenkig ausgeführt werden.

Ähnliche Tragwirkungen wie zuvor beschrieben stellen sich auch bei Systemen mit Pfetten, Bindern oder Stützen ein, an denen durchlaufende Dach- oder Wandverkleidungen anschließen.

Im Rahmen der Näherungsverfahren zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze gekoppelter Biegeträger wird der erste Effekt mit den Kopplungsbedingungen gemäß Abschnitt 3.2.3 erfaßt.

Die Berücksichtigung drehelastischer Stützungen durch die biegesteife Verbindung mit Querträgern bzw. Dach- und Wandverkleidungen erfolgt durch die Hinzunahme von Drehfedern bzw. Drehbettungen in den elastischen Trägersteifigkeitsmatrizen (s. Gl. (8)). Die Feder- bzw. Bettungssteifigkeiten werden nach den in der Literatur bekannten Näherungsverfahren bestimmt (s. [2], [7] bis [13]). Hierauf wird im folgenden Abschnitt kurz eingegangen.

Die Trägerrostwirkung kann durch die Hinzunahme von Steifigkeitsmatrizen, die den Einfluß der Biegesteifigkeit  $EI_y$  von Längs- und Querträger berücksichtigen, er-

faßt werden. Im Rahmen des Näherungsverfahrens wird jedoch vorausgesetzt, daß bei den Längsträgern die Größe der einwirkenden Querlasten und die Momentenverläufe  $M_y$  aus einer vorangegangenen Berechnung bekannt sind.

Die Übertragung der Tangentenverdrehung von Querträgern führt bei den Längsträgern zu Zwängungsspannungen und Verformungen senkrecht zur Stegebene (siehe Abschn. 2.). Diese können im Rahmen eines praxisgerechten Tragsicherheitsnachweises als zusätzliche Imperfektionen aufgefaßt werden (s. [4]). Bei Anwendung des vereinfachten Biegedrillknicknachweises nach DIN 18800 T. 2, El. (311) [2] ist der Trägerbeiwert  $n$  je nach Schlankheit der Träger und Größe der Tangentenverdrehung zu reduzieren.

Ein anderer Weg zur tendenziellen Berücksichtigung der Querträgerneigung besteht darin, durch eine konservative Abschätzung der Drehfedersteifigkeit die Verzweigungslast zu reduzieren (s. Abschn. 3.3.2, Anmerkung zu Gl. (41)).

Für Dach- und Wandverkleidungen, die ebenfalls ihre Tangentenverdrehungen auf die unterstützenden Träger übertragen können, gilt entsprechendes.

### 3.3.2 Drehelastische Stützungen

Der Einfluß der Biegeverformungen aussteifender Bauteile, die Verformbarkeit der Anschlüsse und die Querschnittsverformungen ausgesteifter Träger (s. Bild 11) werden im Rahmen einer Stabilitätsuntersuchung nach der Biegetorsionstheorie üblicherweise in der Größe der wirksamen Drehfeder- bzw. Drehbettungssteifigkeit berücksichtigt. In DIN 18800 T. 2, El. (309) ist zur Bestimmung der resultierenden Drehbettung aus einer kontinuierlichen Stützung Gl. (37) angegeben:

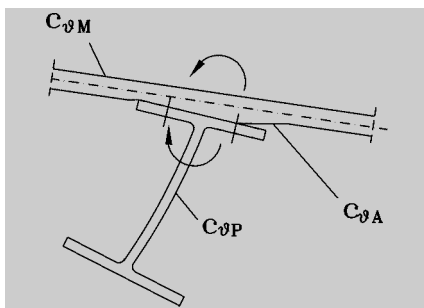
$$\frac{1}{c_{\vartheta}} = \frac{1}{c_{\vartheta M}} + \frac{1}{c_{\vartheta A}} + \frac{1}{c_{\vartheta P}} \quad (37)$$

$c_{\vartheta M}$  Drehbettung aus der Biegesteifigkeit des abstützenden Bauteils

$c_{\vartheta A}$  Drehbettung aus der Verformung des Anschlusses

$c_{\vartheta P}$  Drehbettung aus der Querschnittsverformung des gestützten Trägers

Die Verformbarkeit der abstützenden Bauteile ist im allgemeinen von untergeordneter Bedeutung. Bei Stützungen durch Trapezprofile, Sandwichelemente und Faserzementwellplatten überwiegt der Einfluß der Anschlußverformungen. Bettungswerte hierzu können z. B. [2],



**Bild 11.** Verformungseinflüsse  
**Fig. 11.** Influence of deformations

[7] bis [11] entnommen werden. Formeln bzw. Bettungswerte zur Berücksichtigung von Querschnittsverformungen sind in [7], [9] angegeben.

Bei diskreten drehelastischen Stützungen durch anschließende Querträger werden örtlich konzentrierte Querschnittsverformungen hervorgerufen (s. Bilder 4b und 6c). Ihr Einfluß ist in hohem Maße von der Plattenbiegesteifigkeit des Steges und der Torsionssteifigkeit der Gurte abhängig. Des weiteren spielt auch der Membranspannungszustand im Bereich der Einspannung eine Rolle. Mit zunehmender Beulgefährdung der Längsträger geht die stützende Wirkung der Querträger zurück ([14]).

Die zur Zeit gebräuchliche Näherung zur Berücksichtigung der Einspannwirkung von Querträgern geht auf Untersuchungen an Kranbahnträgern von *J. Oxford* zurück. In [15] wird zur Bestimmung der Obergurtspannungen aus einer exzentrischen Radlasteinleitung das Modell des drehelastisch gebetteten Torsionsstabes verwendet (s. Bild 12). Die Bettung wird aus der Plattenbiegesteifigkeit des Steges bestimmt:

$$c_{\varphi} = \frac{3 \cdot K}{b} = \frac{3}{b} \cdot \frac{E \cdot t_s^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (38)$$

Das Maß  $b$  in Gl. (38) entspricht der reduzierten Steghöhe. Mit der Reduzierung gegenüber der Gesamthöhe kann z. B. der Einfluß der elastischen Einspannung in den Untergurt berücksichtigt werden. Die Lösung der Differentialgleichung

$$-GI_{T,G} \cdot \varphi'' + c_{\varphi} \cdot \varphi = 0 \quad (39)$$

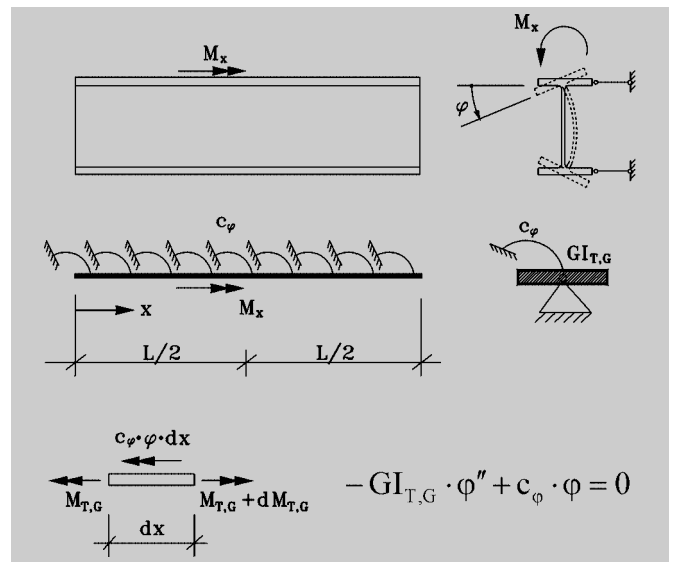
mit den Bedingungen

$$M_{T,G}(x=0) = GI_{T,G} \cdot \varphi'(x=0) = 0$$

$$\varphi(x=L/2) = 1$$

führt zu der Gleichung für die Drehfedersteifigkeit aus der Querschnittsverformung:

$$C_{\vartheta,P} = 2 \cdot \sqrt{c_{\varphi} \cdot GI_{T,G}} \quad (40)$$



**Bild 12.** Modell des elastisch gebetteten Torsionsstabes  
**Fig. 12.** Model of an elastic supported torsional bar

Von *Lindner* und *Schmidt* wurden Untersuchungen zum Biegedrillknicken von I-Trägern unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Lasteinleitungen durchgeführt. In [12], [13] wird zur Erfassung der Einspannwirkung durch aufliegende Querträger die Federsteifigkeit nach Gl. (41) vorgeschlagen:

$$C_{\vartheta} \cong 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot t_s^3}{4 \cdot h_s}} \cdot GI_{T,G} \quad (41)$$

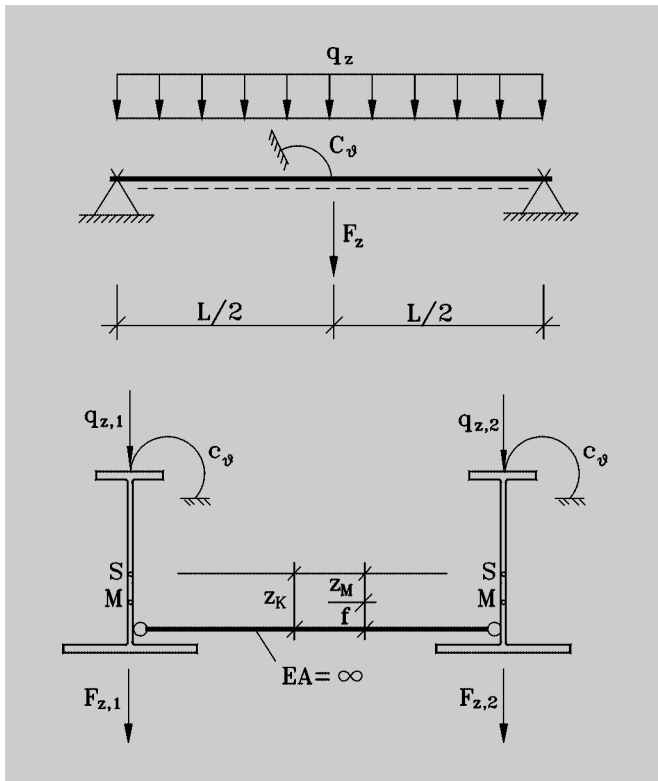
Gegenüber Gl. (40) wird mit einer verminderten Drehbettung gerechnet. Die Federsteifigkeit wird direkt als resultierende Größe angegeben. Das bedeutet, daß die Verformbarkeit der Querträger und deren Anschlüsse als vernachlässigbar klein eingestuft werden.

Mit Gl. (41) erhält man bei Walzprofilen im allgemeinen eine untere Abschätzung der Einspannwirkung. Die Verzweigungslasten werden auch unter Einbeziehung des Membranspannungszustandes vorwiegend zu niedrig bestimmt ([14]). Nach [13] wird dadurch ersatzweise der Einfluß der Querträgerauflagerneigung erfaßt (s. Abschn. 3.3.1).

**3.4 Verzweigungslasten für einfache Fälle**

**3.4.1 Näherungsformeln für dehnstarr gekoppelte Träger**

Bei gabelgelagerten Einfeldträgern mit Gleichstrecken- und Einzellasten erhält man bereits mit einwilligen Sinusansätzen für  $v_M$  und  $\vartheta$  eine gute Näherung für die Verzweigungslast. Für den Fall, daß zwei Träger dehnstarr miteinander gekoppelt sind (Bild 13), ergibt sich unter Berücksichtigung der kinematischen Zwangsbedingung Gl. (18a) durch die Transformation der Steifigkeitsmatrizen gemäß den Gln. (36a-b) ein Gleichungs-



**Bild 13.** Starre Kopplung von zwei Trägern  
**Fig. 13.** Rigid coupling of two beams

system mit drei unbekanntem Ansatzfreiwerten. Aus der Forderung, daß die Koeffizientendeterminante der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu Null wird (s. Gl. (34)), erhält man ein kubisches Polynom zur Bestimmung von  $\eta_{Ki}$ . Die Angabe einer geschlossenen Lösung ist möglich.

Die folgenden Formeln gelten für den speziellen Fall, daß zwei Träger mit gleichem Querschnitt und gleicher drehelastischer Stützung in der Höhe  $z_K$  dehnstarr miteinander gekoppelt sind (s. Bild 13). Dabei ist es unerheblich, ob die Kopplung diskret in Feldmitte oder kontinuierlich über die gesamte Trägerlänge erfolgt (s. Bild 3, Linien a und d).

Der Querschnitt muß mindestens einfachsymmetrisch sein. Bei doppelsymmetrischem Querschnitt werden die Querschnittswerte  $z_M$  und  $r_{My}$  zu Null. Dadurch fallen verschiedene Anteile der Steifigkeitskoeffizienten  $g_2$  und  $g_4$  aus Gl. (42) heraus.

Die Querlasten und deren Lastangriffspunkte können unterschiedlich oder auch gleich sein. Sind bestimmte Lasten aus Bild 13 nicht vorhanden, so entfallen die zugehörigen Terme in den Steifigkeitskoeffizienten  $g_1$  bis  $g_4$ . Sofern keine diskrete oder kontinuierliche drehelastische Stützung vorhanden ist, gilt entsprechendes auch für den Koeffizient  $c_2$ .

Für das System nach Bild 13 erhält man mit den zuvor beschriebenen Ansätzen und Rechenschritten die Knickbedingung Gl. (42)

$$a_0 + a_1 \cdot \eta + a_2 \cdot \eta^2 + a_3 \cdot \eta^3 = 0, \quad (42)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (f^2 \cdot c_1 + c_2), \\ a_1 &= 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot [f \cdot (g_1 + g_3) + g_2 + g_4] + (f \cdot c_1)^2 \cdot (g_2 + g_4), \\ a_2 &= -(f^2 \cdot c_1 + c_2) \cdot (g_1^2 + g_3^2) + 2 \cdot c_1 \cdot \\ &\quad \times [f \cdot (g_1 \cdot g_4 + g_2 \cdot g_3) + g_2 \cdot g_4], \\ a_3 &= -2 \cdot f \cdot g_1 \cdot g_3 \cdot (g_1 + g_3) - g_1^2 \cdot g_4 - g_2 \cdot g_3^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{EI_z \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3}, \\ c_2 &= \frac{EC_M \cdot \pi^4}{2 \cdot L^3} + \frac{GI_T \cdot \pi^2}{2 \cdot L} + c_{\vartheta} \cdot \frac{L}{2} + C_{\vartheta}, \\ g_1 &= -\frac{M_{q,1}}{L} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) - \frac{M_{F,1}}{L} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right), \\ g_2 &= -\frac{M_{q,1} \cdot r_{My}}{L} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) + \frac{q_{z,1} \cdot L}{2} \cdot (z_{q,1} - z_M) - \\ &\quad - \frac{M_{F,1} \cdot r_{My}}{L} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) + F_{z,1} \cdot (z_{F,1} - z_M), \\ g_3 &= -\frac{M_{q,2}}{L} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) - \frac{M_{F,2}}{L} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right), \\ g_4 &= -\frac{M_{q,2} \cdot r_{My}}{L} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) + \frac{q_{z,2} \cdot L}{2} \cdot (z_{q,2} - z_M) - \\ &\quad - \frac{M_{F,2} \cdot r_{My}}{L} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) + F_{z,2} \cdot (z_{F,2} - z_M), \end{aligned}$$

$$f = z_K - z_M.$$

( $M_q, M_F$  siehe Gln. (4) und (5))

Sind beide Träger belastet, gehen aus Gl. (42) drei reelle Nullstellen hervor, von denen die kleinste positive dem kritischen Lastfaktor  $\eta_{Ki}$  entspricht.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= r + 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\omega/3) \\ \eta_2 &= r + 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\omega/3 + 2 \cdot \pi/3) \\ \eta_3 &= r + 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\omega/3 + 4 \cdot \pi/3) \end{aligned} \quad (43)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{p^3}{27}} \quad \cos \omega = \frac{q}{2 \cdot \rho} \\ p &= -\frac{a_1}{a_3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 \\ q &= -\frac{a_0}{a^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3^2} - \frac{2}{27} \cdot \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 \\ r &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{a_2}{a_3} \end{aligned}$$

Ist der zweite Träger nicht belastet, wird der Koeffizient  $a_3$  in Gl. (42) zu Null. Die Nullstellen des in diesem Fall quadratischen Polynoms lassen sich mit Gl. (44) bestimmen:

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot a_2} \cdot (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}) \quad (44)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (f^2 \cdot c_1 + c_2) \\ a_1 &= 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (f \cdot g_1 + g_2) + (f \cdot c_1)^2 \cdot g_2 \\ a_2 &= -(f^2 \cdot c_1 + c_2) \cdot g_1^2 \end{aligned}$$

( $c_1, c_2, g_1, g_2$  und  $f$  siehe Gl. (42))

Bei bekanntem Lastfaktor  $\eta_{Ki}$  können nun die idealen Biegedrillknickmomente berechnet werden:

$$\begin{aligned} M_{y,Ki,1} &= \eta_{Ki} \cdot (M_{q,1} + M_{F,1}) \\ M_{y,Ki,2} &= \eta_{Ki} \cdot (M_{q,2} + M_{F,2}) \end{aligned} \quad (45a-b)$$

Mit den angegebenen Näherungsformeln erhält man Verzweigungslasten, deren Abweichungen zu Berechnungen mit höherwertigen Verformungsansätzen in den meisten Fällen deutlich unter 5 % liegen (s. Anwendungsbeispiel Abschn. 4). Größere Differenzen ergeben sich bei Systemen mit hohen Drehfeder- oder Bettungssteifigkeiten (s. Abschn. 3.2.2).

Werden 4, 6, 8 oder mehr Träger dehnstarr miteinander gekoppelt und weisen jeweils die Hälfte der Träger gleiche Belastungen auf, lässt sich die Verzweigungslast dieser Systeme offensichtlich ebenfalls mit den angegebenen Formeln berechnen.

### 3.4.2 Diagramme zur Ermittlung der Biegedrillknickmomente

Mit Hilfe des Programms PROFIL [1] wurden Diagramme zur Ermittlung der Biegedrillknickmomente von Trägersystemen mit diskreter und kontinuierlicher starrer

Kopplung aufgestellt. Die notwendigen Berechnungen und die Datenaufbereitung in Form von Bild 14 wurden von Herrn cand.-Ing. *Andreas Hess*, Fachbereich Bauingenieurwesen der TU Darmstadt, durchgeführt. Ihm sei an dieser Stelle herzlich dafür gedankt.

Den Diagrammen liegen Systeme mit gabelgelagerten doppelsymmetrischen I-Trägern zugrunde. Die Querschnitte der einzelnen Träger sind jeweils gleich. Die Lastangriffspunkte der Querlasten und die Höhe der Kopplungen wurden in den Schwerpunkt der Obergurte gelegt. Die Berechnungen erfolgten unter Ausschluß der Querschnittsverformungen. Die Anwendung der Diagramme ist folgendermaßen vorgesehen:

Mit der Belastungsart (Einzel- oder Gleichstreckenlasten) und der Anzahl der gekoppelten Träger liegt der zu verwendende Diagrammtyp fest. Als Kurvenparameter dienen der Momentenverlauf  $M_y$  und das Belastungsverhältnis  $q_2/q_1$  bzw.  $F_2/F_1$ . In Abhängigkeit von der Stabkennzahl

$$\chi = \frac{EC_M}{GI_T \cdot L^2} \quad (46)$$

ist den Diagrammen ein Beiwert  $k$  zu entnehmen, mit dem dann das Biegedrillknickmoment des Systems berechnet werden kann:

$$M_{y,Ki} = \frac{k}{L} \cdot \sqrt{GI_T \cdot EI_z} \quad (47)$$

Die Biegedrillknickmomente der einzelnen Träger  $j$  ergeben sich damit zu

$$M_{y,j,Ki} = M_{y,Ki} \cdot \frac{q_j}{\sum q} \quad \text{bzw.} \quad M_{y,j,Ki} = M_{y,Ki} \cdot \frac{F_j}{\sum F} \quad (48a-b)$$

Die Werte  $M_{y,Ki}$  beziehen sich auf die betragsgrößten Momente  $M_y$ , d. h. entweder die Feld- oder die Stützmomente.

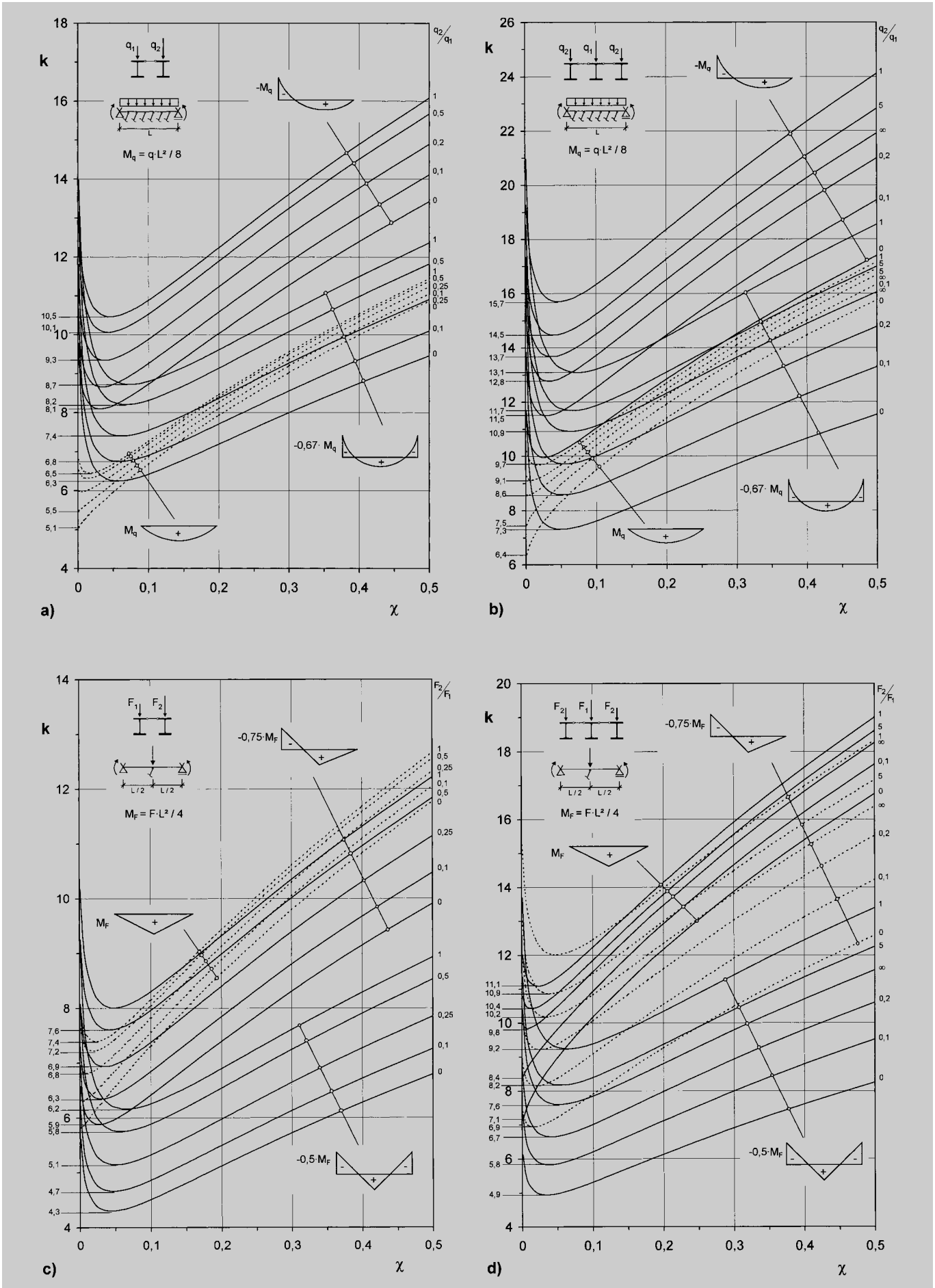
Der Beiwert  $k$  zeigt nur eine sehr geringe Abhängigkeit von der Profilgröße und der Profilverihe. Den Diagrammen liegen die Kleinstwerte der IPE-Reihe zugrunde. Die Anwendung ist näherungsweise auch für andere doppelsymmetrische I-Profile möglich.

Bei den Diagrammen für drei gekoppelte Träger (Diagramme b und d in Bild 14) ist zu beachten, daß der Beiwert  $k$  vom Belastungsverhältnis Null bis zum Belastungsverhältnis Eins ansteigt und darüber hinaus wieder abfällt.

Sind die Biegedrillknickmomente von Systemen mit mehr als drei Trägern zu bestimmen, können die Diagramme unter Umständen auch dazu verwendet werden. Voraussetzung dafür ist, daß nur zwei unterschiedlich große Querlasten vorliegen und daß das Verhältnis der Zahlen gleich belasteter Träger  $n_1:n_2 = 1:1$  bzw.  $1:2$  beträgt (siehe Anwendungsbeispiel im Abschn. 4).

### 3.5 Berechnung der Verzweigungslast mit Hilfe von Programmen

Seit einiger Zeit sind Programme auf dem Markt erhältlich, mit denen Verzweigungslasten und Zustandsgrößen von Einfeld- und Durchlaufträgern nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung berechnet werden können (z. B. [16], [17]). Mit ihrer Hilfe lassen sich im Rahmen einer Iteration oder einer Polynomapproximation auch die



**Bild 14.** Beiwerte  $k$  zur Bestimmung der Biegedrillknickmomente gekoppelter Träger  
**Fig. 14.** Coefficients  $k$  to determine moments of lateral-torsional-buckling of coupled beams

Verzweigungslasten von diskret gekoppelten Trägersystemen bestimmen. Bevor in diesem Abschnitt das prinzipielle Vorgehen beschrieben wird, sollen zunächst einige mechanische Hintergründe erläutert werden.

In der Einführung wurde darauf hingewiesen, daß bei gekoppelten Trägersystemen im Falle des seitlichen Ausweichens die weniger belasteten Träger die stärker belasteten stabilisieren. Bei einer diskreten Kopplung kann diese stabilisierende Wirkung durch eine Translationsfeder erfaßt werden. In Bild 15 ist die Verzweigungslast eines am Obergurt gestützten Trägers über die Federsteifigkeit  $C_y$  aufgetragen. Die Erhöhung von  $q_{z,KI}$  ist im vorliegenden Fall annähernd proportional zur Größe der Federsteifigkeit. Bei Überschreiten der Grenzsteifigkeit  $C_y^*$  schlägt die Verzweigungsfigur in einen zweiwelligen antisymmetrischen Verlauf um. Bis zu diesem Punkt hat sich die Verzweigungslast des Trägers gegenüber dem ungestützten Fall mehr als vervierfacht.

Bild 16 gibt Auskunft über die stützende Wirkung eines durch eine Querlast  $q_z$  beanspruchten Trägers. Die Federsteifigkeit  $C_y$  erhält man durch Bildung des Reziprokwertes der seitlichen Verschiebung infolge der Last „1“ an der Stelle der Kopplung. Bis zum Erreichen der Verzweigungslast des Trägers fällt  $C_y$  auf Null ab. Bei weiterer Erhöhung von  $q_z$  geht von dem Träger keine stützende, sondern eine destabilisierende Wirkung aus. Dies drückt sich im Diagramm durch negative Federsteifigkeiten  $C_y$  aus. Ihre Bestimmung kann an einem Träger erfolgen, bei dem an der Stelle der Kopplung zusätzlich zur Last „1“ eine Translationsfeder  $C_y$  mit ausreichend hoher Steifigkeit angesetzt wird. Mit dieser Feder verhindert man eine Berechnung mit indefiniter Gesamtsteifigkeitsmatrix. Zur Berechnung der Federsteifigkeit des Trägers ist vom Reziprokwert der seitlichen Verschiebung die Steifigkeit der „Behelfsfeder“ abzuziehen.

Bei Systemen mit gabelgelagerten Einfeldträgern und diskreter dehnstarrer Kopplung in Feldmitte kann die Federsteifigkeit, die von einem Träger ohne Querlast ausgeht, mit Gl. (49) bestimmt werden:

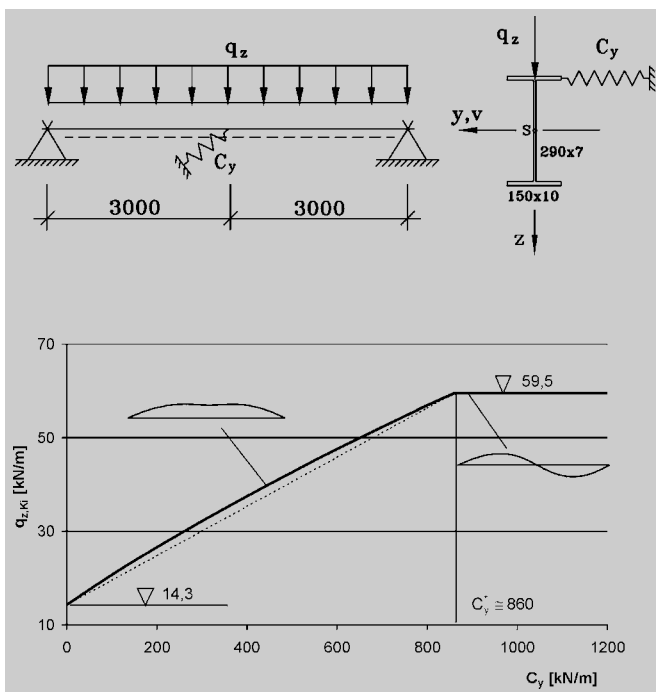
$$C_y^0 = \frac{1}{\frac{L^3}{48 \cdot EI_z} + \frac{(z_K - z_M)^2}{EC_M}} \cdot \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^3 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\sinh^2(\varepsilon/2)}{\sinh \varepsilon}\right) \quad (49)$$

mit  $\varepsilon = L \cdot \sqrt{\frac{GI_T}{EC_M}}$

Für den Träger nach Bild 16 erhält man mit  $L = 6,00$  m,  $z_K - z_M = -0,15$  m,  $EI_z = 1183$  kNm<sup>2</sup>,  $GI_T = 10,65$  kNm<sup>2</sup> und  $EC_M = 26,59$  kNm<sup>4</sup> den Wert  $C_y^0 = 186$  kN/m. Teilt man die Grenzfedersteifigkeit  $C_y^*$  (s. Bild 15) durch  $C_y^0$ , kommt man zu dem Ergebnis, daß fünf unbelastete Träger erforderlich sind, um einen belasteten Träger derart zu stabilisieren, daß dieser antisymmetrisch ausweicht. Dies zeigt, daß selbst bei sehr ungleichmäßig belasteten Trägersystemen mit einer symmetrischen Ausweichfigur zu rechnen ist. Nur in seltenen Fällen kann an der Stelle der Kopplung eine starre Lagerung angenommen werden.

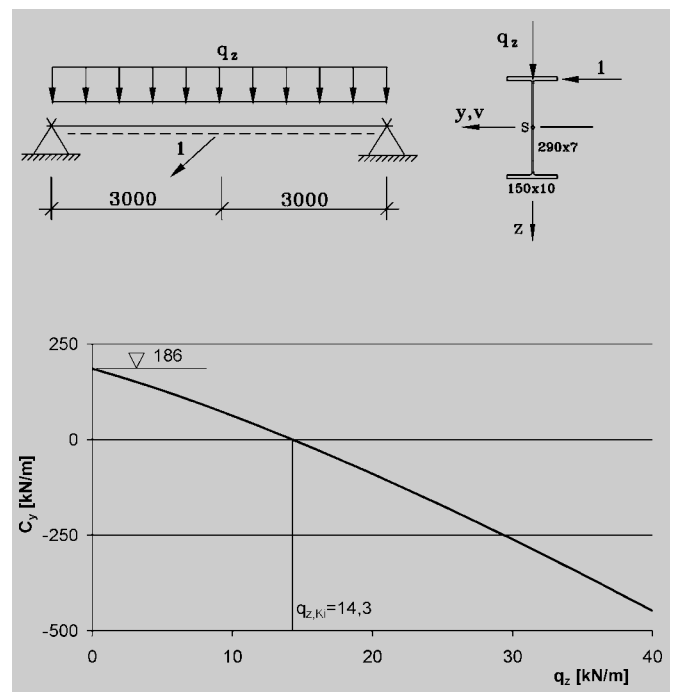
Bei einer iterativen Berechnung der Verzweigungslast diskret gekoppelter Trägersysteme besteht die Aufgabe darin, das Lastniveau aufzufinden, bei dem die Summe der stabilisierenden und destabilisierenden Kräfte der Träger, die an die Koppelstäbe abgegeben werden, im Gleichgewicht stehen. In Bild 17 wird das Prinzip am Beispiel von drei unterschiedlich belasteten Trägern, die in Feldmitte am Obergurt dehnstarr miteinander verbunden sind, verdeutlicht.

Liegt die Federcharakteristik  $C_y$  aus einer vorangegangenen Berechnung vor, kann die Iteration mit Hilfe einer Grafik, wie sie in Bild 17 dargestellt ist, erfolgen. Alternativ dazu besteht auch die Möglichkeit, den Ver-



**Bild 15.** Verzweigungslast in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit  $C_y$

**404** Fig. 15. Buckling load dependent on spring stiffness  $C_y$



**Bild 16.** Federsteifigkeit in Abhängigkeit von der Größe der Querlast

**Fig. 16.** Spring stiffness dependent on quantity of cross load

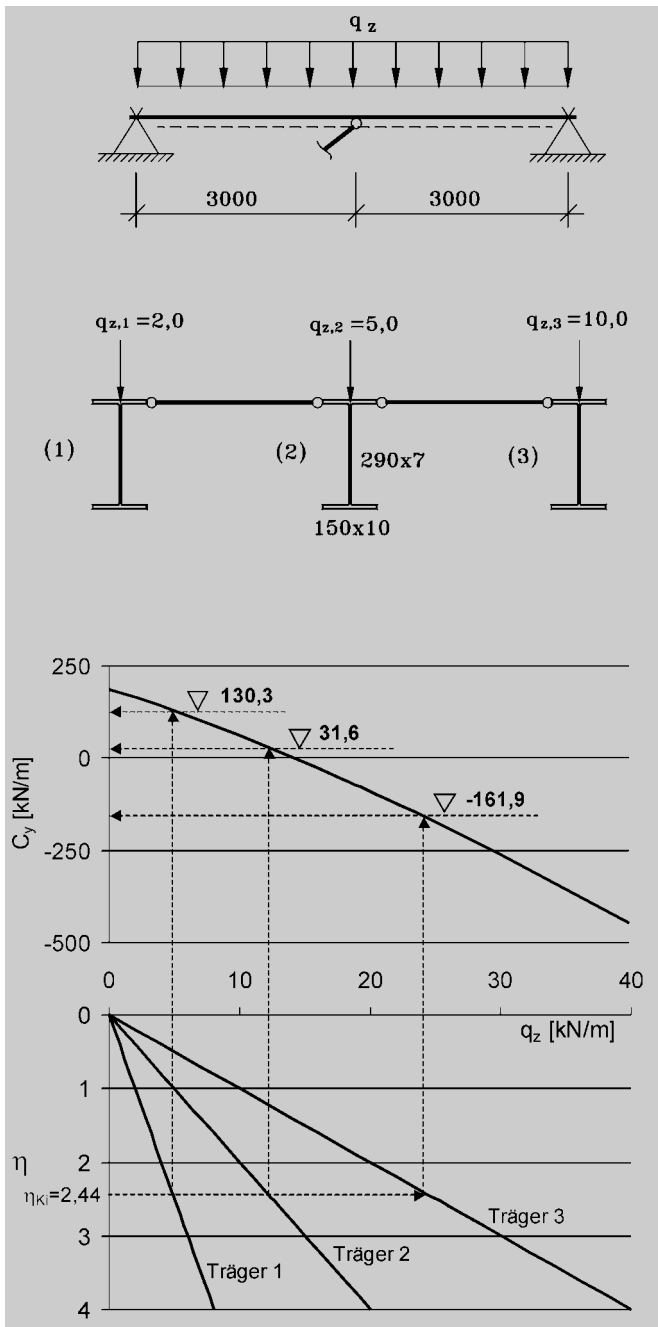
lauf von  $C_y$  durch ein Polynom anzunähern und über die Gleichgewichtsbedingung  $\sum C_{y,j} = 0$  den kritischen Lastfaktor  $\eta_{Ki}$  auf numerischem Weg zu bestimmen.

Nähert man z. B. die Federsteifigkeit querbelasteter Träger durch eine quadratische Parabel an,

$$C_y(q_z) = b_0 + b_1 \cdot q_z + b_2 \cdot q_z^2 \quad (50)$$

führt die Gleichgewichtsbedingung von n gekoppelten Trägern zu einer quadratischen Gleichung für  $\eta$ :

$$\sum_{j=1}^n C_{y,j} \equiv 0 = \sum_{j=1}^n b_0 + b_1 \cdot \eta \cdot q_{z,j} + b_2 \cdot (\eta \cdot q_{z,j})^2 = a_0 + a_1 \cdot \eta + a_2 \cdot \eta^2 \quad (51)$$



**Bild 17.** Ermittlung der Verzweigungslast gekoppelter Träger mit Hilfe der Federcharakteristik  
**Fig. 17.** Determination of buckling load of coupled beams with spring characteristic

Bestimmt man die Freiwerte  $b_0$  bis  $b_2$  in Gl. (50) mit den Wertepaaren

$$\begin{aligned} q_z = 0 &\rightarrow C_y = C_y^0 \\ q_z = q_{z,Ki} &\rightarrow C_y = 0 \\ q_z = 2 \cdot q_{z,Ki} &\rightarrow C_y = C_y^1 \end{aligned} \quad (52a-c)$$

erhält man für  $a_0$  bis  $a_2$  die Ausdrücke

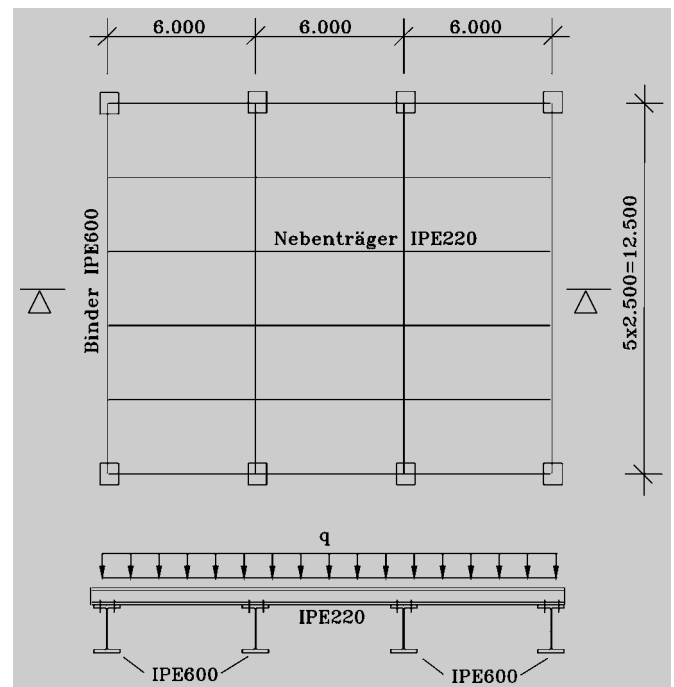
$$\begin{aligned} a_0 &= n \cdot C_y^0 \\ a_1 &= - \frac{3 \cdot C_y^0 + C_y^1}{2 \cdot q_{z,Ki}} \cdot \sum_{j=1}^n q_{z,j} \\ a_2 &= \frac{C_y^0 + C_y^1}{2 \cdot q_{z,Ki}^2} \cdot \sum_{j=1}^n q_{z,j}^2 \end{aligned} \quad (53a-c)$$

Die Auflösung von Gl. (51) nach  $\eta$  kann wiederum mit Gl. (44) erfolgen. Liegen andere Belastungen als Gleichstreckenlasten vor, ist sinngemäß zu verfahren.

Mit dem vorgeschlagenen Näherungsverfahren lässt sich die Verzweigungslast von Systemen mit einer beliebigen Anzahl dehnstarr gekoppelter Träger mit gleichem Querschnitt und gleichartiger Belastung in einfacher Weise bestimmen. Bei gabelgelagerten Trägern mit Belastungen entsprechend Bild 8a und 8b ist die Anwendung – wie Bild 3 mit den Linien a und d zeigt – auch für eine kontinuierliche Kopplung möglich.

#### 4 Anwendungsbeispiel

Eine Trägerlage aus Nebenträgern und Bindern wird durch eine Flächenlast  $q = 5,00 \text{ kN/m}^2$  beansprucht. Die Trägerquerschnitte werden jeweils gleich ausgeführt (s. Bild 18). Mit den unterschiedlichen Verfahren aus Abschnitt 3 wird die Biegedrillknicklast der Binder unter



**Bild 18.** System und Belastung  
**Fig. 18.** System and load

Berücksichtigung des Kopplungseffektes und der drehelelastischen Einspannung durch die Nebenträger bestimmt.

**Querschnitts- und Systemangaben**

- IPE600:
- $I_y = 92080 \text{ cm}^4$
- $I_z = 3390 \text{ cm}^4$
- $I_T = 165,4 \text{ cm}^4$
- $C_M = 2846000 \text{ cm}^6$
- $I_{T,G} = 66,0 \text{ cm}^4$
- $t_s = 12 \text{ mm}$
- $h_s = 581 \text{ mm}$
- $r_{M_y} = 0$
- $Z_M = 0$
- $L = 12,50 \text{ m}$
- $Z_K = -h/2 = -0,30 \text{ m}$
- $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$
- $G = 8077 \text{ kN/cm}^2$

**Drehbettung**

Die Federsteifigkeiten zur Berücksichtigung der Einspannung in die Nebenträger werden mit Gl. (41) bestimmt und zu einer Drehbettung „verschmiert“ (s. [13]):

$$C_{\vartheta} \cong 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot t_s^3}{4 \cdot h_s}} \cdot GI_{T,G} = 182,5 \text{ kNm}$$

$$c_{\vartheta} = \frac{(m + 1) \cdot C_{\vartheta}}{L} = \frac{(4 + 1) \cdot 182,5}{12,5} = 73,0 \text{ kNm/m}$$

m Anzahl der Federn zwischen den Lagern

**Belastung der Binder**

Die Belastung aus den Nebenträgern entspricht in guter Näherung den Auflagerlasten starr gelagerter Dreifeldträger. Ersatzweise wird mit Gleichstreckenlasten gerechnet, deren Angriff am Obergurt der Binder erfolgt:

Innenbinder:

$$q_{z,1} = 1,1 \cdot 6,00 \cdot 5,00 = 33,0 \text{ kN/m}$$

$$z_{q,1} = -0,30 \text{ m}$$

$$M_{q,1} = \frac{33,0 \cdot 12,5^2}{8} = 644,5 \text{ kNm}$$

Randbinder:

$$q_{z,2} = 0,4 \cdot 6,00 \cdot 5,00 = 12,0 \text{ kN/m}$$

$$z_{q,2} = -0,30 \text{ m}$$

$$M_{q,2} = \frac{12,0 \cdot 12,5^2}{8} = 234,4 \text{ kNm}$$

Berücksichtigt man die Trägerrostwirkung, ergibt sich bei den Innenbindern eine etwa 1 % kleinere Last.

**Verzweigungslast nach Abschnitt 3.2**

Durch Ausnutzung der Symmetrie reduziert sich das zu berechnende System auf zwei gekoppelte Binder – jeweils einen Innen- und einen Randbinder. Die Kopplung durch die Nebenträger wird als kontinuierlich und starr idealisiert. Mit dem Einsetzen der Querschnitts-, System- und Lastangaben in den Gln. (8) und (9) ergeben sich die

elastischen und geometrischen Trägersteifigkeitsmatrizen. In den Systemsteifigkeitsmatrizen werden die geometrischen Zwangsbedingungen Gln. (18a–b) mit der Methode der *Lagrangeschen* Multiplikatoren berücksichtigt (s. Abschn. 3.2.4):

$$\bar{K}_e =$$

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$\vartheta_{1,1}$	$\vartheta_{1,2}$	$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$\vartheta_{2,1}$	$\vartheta_{2,2}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
177,5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	14380	0	0	0	0	0	0	0	1
		523,9	0	0	0	0	0	0,3	0
			2138	0	0	0	0	0	0,3
				177,5	0	0	0	-1	0
					14380	0	0	0	-1
						523,9	0	-0,3	0
							2138	0	-0,3
								0	0
									0

$$\bar{K}_g =$$

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$\vartheta_{1,1}$	$\vartheta_{1,2}$	$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$\vartheta_{2,1}$	$\vartheta_{2,2}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
0	0	-221,2	38,67	0	0	0	0	1	0
	0	348,0	-1578	0	0	0	0	0	1
		-61,88	0	0	0	0	0	0,3	0
			-61,88	0	0	0	0	0	0,3
				0	0	-80,44	14,06	-1	0
					0	126,6	-573,9	0	-1
						-22,5	0	-0,3	0
							-22,5	0	-0,3
								0	0
									0

Den kritischen Lastfaktor  $\eta_{Ki}$  erhält man durch Lösen des verallgemeinerten Eigenwertproblems:

$$(\bar{K}_e + \eta_{Ki} \cdot \bar{K}_g) \cdot \bar{U}_{Ki} = 0 \quad \rightarrow \quad \eta_{Ki} = 1,705$$

Die idealen Biegedrillknickmomente der Innen- und Randbinder ergeben sich damit zu

$$M_{y,1,Ki} = \eta_{Ki} \cdot M_{q,1} = 1099 \text{ kNm} \quad \text{und}$$

$$M_{y,2,Ki} = \eta_{Ki} \cdot M_{q,2} = 400 \text{ kNm} .$$

**Verzweigungslast nach Abschnitt 3.4.1**

Mit den Steifigkeitskoeffizienten

$$c_1 = 177,5 \text{ kN/m},$$

$$c_2 = 523,9 \text{ kN/m},$$

$$g_1 = -221,2 \text{ kN}, \quad g_3 = -221,2 \cdot 12/33 = -80,4 \text{ kN},$$

$$g_2 = -61,9 \text{ kNm}, \quad g_4 = -61,9 \cdot 12/33 = -22,5 \text{ kNm},$$

dem Abstand der Kopplung  $f = -0,30 \text{ m}$  und den Zwischenwerten

$$a_0 = 1,004 \cdot 10^8 \quad a_2 = -3,047 \cdot 10^7$$

$$a_1 = 8,979 \cdot 10^5 \quad a_3 = -1,719 \cdot 10^6$$



$$p = 105,3 \quad q = -357,3 \quad r = -5,909$$

$$\rho = 207,9 \quad \omega = 2,605$$

erhält man einen kritischen Lastfaktor von

$$\eta_{Ki} = r + 2 \cdot \sqrt[3]{\rho} \cdot \cos(\omega/3) = 1,746.$$

**Verzweigungslast nach Abschnitt 3.4.2**

Die drehelastische Bettung wird mit Hilfe des eingliedri- gen Sinusansatzes für die Verdrehung  $\vartheta$  zu einer ideellen Torsionssteifigkeit umgerechnet (s. [8], [13], [18]):

$$GI_{T,id} = GI_T + c_\vartheta \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = 1289 \text{ kNm}^2$$

Mit den Parametern

$$\chi = \frac{EC_M}{GI_{T,id} \cdot L^2} = 0,00297 \quad \text{und} \quad q_2/q_1 = 12/33 = 0,36$$

liest man aus dem Diagramm c in Bild 14 den Beiwert  $k = 6,2$  ab. Die idealen Biegedrillknickmomente ergeben sich damit zu

$$M_{y,Ki} = \frac{k}{L} \cdot \sqrt{GI_{T,id} \cdot EI_z} = 1503 \text{ kNm} ,$$

$$M_{y,1,Ki} = 1503 \cdot 33/(33 + 12) = 1102 \text{ kNm} ,$$

$$M_{y,2,Ki} = 1503 \cdot 12/(33 + 12) = 401 \text{ kNm} .$$

Der kritische Lastfaktor beträgt

$$\eta_{Ki} = \frac{1503 \cdot 8}{(33 + 12) \cdot 12,5^2} = 1,71 .$$

**Verzweigungslast nach Abschnitt 3.5**

Der Effekt der Kopplung wird näherungsweise mit einem Verbindungsstab in Feldmitte erfaßt. Die Bestimmung der Federsteifigkeit  $C_y^1$  erfolgt an einem Träger, bei dem an der Stelle der Kopplung eine Translationsfeder  $C_y = 500 \text{ kN/m}$  angesetzt wird (Bild 19). Um ein antime- trisches Ausweichen unterhalb des geforderten Last- niveaus auszuschließen, wird zusätzlich die Rotation um die z-Achse ausgeschaltet. Die Berechnungen erfolgen mit dem Programm PROFIL [1] unter Ausschluß der Querschnittsverformungen.

$$q_{z,Ki} = 40,9 \text{ kN/m} \quad (C_y = 0)$$

$$q_z = 0, \quad C_y = 0$$

$$\rightarrow v_K = 0,00594 \text{ m}, \quad C_y^0 = 1/0,00594 = 168 \text{ kNm}$$

$$q_z = 2 \cdot q_{z,Ki} , \quad C_y = 500 \text{ kN/m}$$

$$\rightarrow v_K = 0,00678 \text{ m}, \quad C_y^1 = 1/0,00678 - 500 = -353 \text{ kNm}$$

$$a_0 = 2 \cdot C_y^0 = 336 \text{ kN/m}$$

$$a_1 = -\frac{3 \cdot C_y^0 + C_y^1}{2 \cdot q_{z,Ki}} \cdot (q_{z,1} + q_{z,2}) = -83,1 \text{ kN/m}$$

$$a_2 = \frac{C_y^0 + C_y^1}{2 \cdot q_{z,Ki}^2} \cdot (q_{z,1}^2 + q_{z,2}^2) = -68,2 \text{ kN/m}$$

$$\eta_{Ki} = \frac{1}{2 \cdot a_2} \cdot (-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}) = 1,69$$

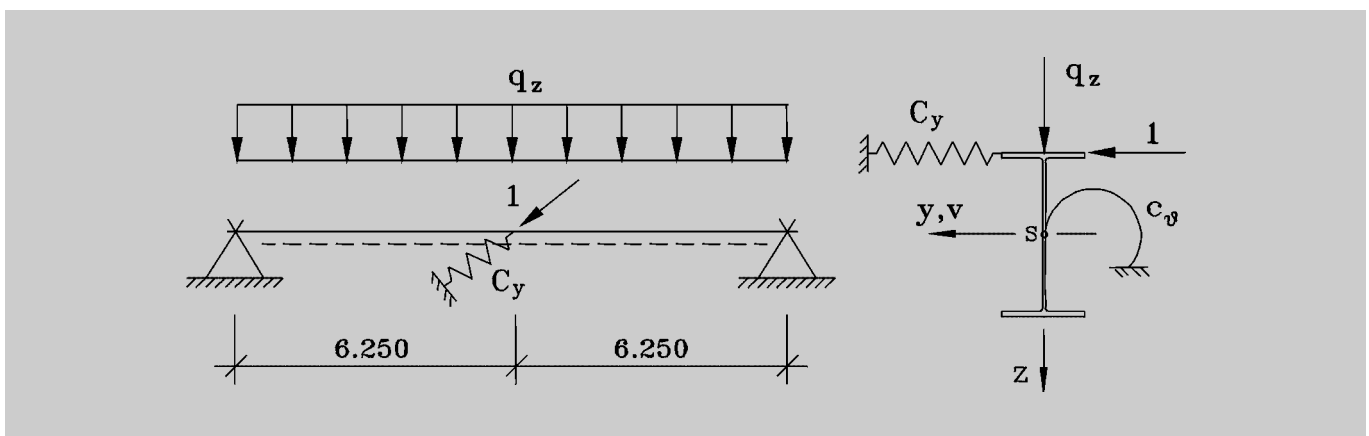
**Anmerkungen zum Beispiel**

Vernachlässigt man bei den Innenbindern den Effekt der Kopplung und der drehelastischen Stützung, ergibt sich nach der Biegetorsionstheorie ein kritischer Lastfaktor von  $\eta_{Ki} = 0,39$ . Durch die Drehbettung erhöht sich dieser Wert auf  $\eta_{Ki} = 1,24$ . Berücksichtigt man zusätzlich den Effekt der Kopplung, erhält man schließlich den Faktor  $\eta_{Ki} = 1,70$ .

Den Näherungsformeln des Abschnitts 3.4.1 liegen eingliedrige Sinusansätze für  $v_M$  und  $\vartheta$  zugrunde. Die Verzweigungslast ist 2,4 % höher als diejenige, welche sich aus den zweigliedrigen Ansätzen (s. Gln. (6) und (7)) ergibt.

Die Berechnung des Systems nach Bild 18 als Träger- rost unter Einbeziehung der Querschnittsverformungen liefert bei einer Einteilung der Trägerabschnitte in 10 Ele- mente ([1]) einen kritischen Lastfaktor von  $\eta_{Ki} = 1,80$ . Dabei wurde das Biegedrillknicken der Nebenträger durch den Ansatz einer ausreichend hohen Schubfeld- steifigkeit verhindert.

Der Vergleich zeigt, daß man mit den angegebene- nen Rechenhilfen und Näherungsformeln bereits recht genaue Ergebnisse erhält.



**Bild 19.** System zur Bestimmung der Federsteifigkeiten  
**Fig. 19.** System to determine spring stiffness

## Literatur

- [1] *Stroetmann, R.*: PROFIL – FEM-Programm zur Struktur-analyse von Stahltragwerken mit stabilitätsgefährdeten I-Profilen – Version 1/99. Fachgebiet Stahlbau und Werkstoffmechanik, TU Darmstadt.
- [2] DIN 18800 T. 2: Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken. Berlin: Beuth-Verlag GmbH, 1990.
- [3] Eurocode 3 Teil 1-1, DIN V ENV 1993-1-1 Stahlbau – Stahlhochbau. Berlin: Beuth-Verlag GmbH, 1994.
- [4] *Stroetmann, R.*: Zur Stabilitätsberechnung räumlicher Tragsysteme mit I-Profilen nach der Methode der finiten Elemente. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik der TU Darmstadt. Heft 61, 1999.
- [5] *Friemann, H.*: Biegedrillknicken gerader Träger – Grundlagen zum Programm Drill. Veröffentlichung des Instituts für Stahlbau und Werkstoffmechanik der TH Darmstadt. Heft 56, 1996.
- [6] *Bathe, K.-J.*: Finite-Elemente-Methoden. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong: Springer-Verlag 1990.
- [7] *Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H.*: Stahlbauten – Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis Teil 4. Berlin, Köln: Beuth Verlag GmbH, Berlin: Verlag Ernst und Sohn, 3. Auflage 1998.
- [8] *Lindner, J.*: Stabilisierung von Trägern durch Trapezbleche. Stahlbau 56 (1987), H. 1, S. 9–15.
- [9] *Lindner, J.*: Stabilisierung von Biegeträgern durch Drehbettung – eine Klarstellung. Stahlbau 56 (1987), H. 12, S. 365–373.
- [10] *Lindner, J., Gregull, Th.*: Drehbettungswerte für Dachdeckungen mit untergelegter Wärmedämmung. Stahlbau 58 (1989), H. 6, S. 173–179.
- [11] *Lindner, J., Groeschel, F.*: Drehbettungswerte für Profilblechbefestigungen mit Setzbolzen bei unterschiedlich großen Auflasten. Stahlbau 65 (1996), H. 6, S. 218–224.
- [12] *Lindner, J., Schmidt, J. S.*: Erfassung wirklichkeitsnaher Lasteinleitung in I-Trägern. Forschungsbericht P77 der Studiengesellschaft für Anwendungstechnik von Eisen und Stahl e.V., Düsseldorf 1982.
- [13] *Lindner, J., Schmidt, J. S.*: Biegedrillknicken von I-Trägern unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Lasteinleitung. Stahlbau 51 (1982), H. 9, S. 257–263.
- [14] *Stroetmann, R.*: Lagerungen und Aussteifungen biegedrillknickgefährdeter Träger. Seminarband zum Seminar/Workshop Biegedrillknicken. TU Darmstadt, Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik. Darmstadt 1998.
- [15] *Oxford, J.*: Zur Beanspruchung der Obergurte vollwandiger Kranbahnträger durch Torsionsmomente und durch Querkraftbiegung unter dem örtlichen Radlastangriff. Stahlbau 32 (1963), H. 12, S. 360–367.
- [16] *Friemann, H.*: Programm DRILL. TU Darmstadt, Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik. Darmstadt 1999.
- [17] *Osterrieder, P.*: Programm BTII. Ingenieurbüro Friedrich und Lochner, Stuttgart 1998.
- [18] *Friemann, H., Stroetmann, R.*: Zum Nachweis aussteifer biegedrillknickgefährdeter Träger. Stahlbau 67 (1998), H. 12, S. 936–955.

### Autor dieses Beitrages:

Dr.-Ing. Richard Stroetmann, Ingenieurbüro Krebs und Kiefer, Hilpertstraße 20, 64295 Darmstadt

## Hängebrücken – Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft

Sven Ewert

### Historischer Abriss [1], [2], [3]

Lange bevor zum Anfang des 19. Jh. in Europa die ersten Hängebrücken gebaut wurden, gab es in den Hochkulturen Asiens und Südamerikas viele Beispiele für dieses Konstruktionsprinzip. Noch heute werden in Peru oder in Indien Schluchten mit Hängestegen aus Pflanzenfasern überbrückt, bei denen die Laufbretter direkt auf den Hauptseilen aufliegen. Die ältesten eisernen Konstruktionen wurden über Missionare aus China überliefert. 1667 wurde in Amsterdam über eine Kettenbrücke in der Provinz Yünnan mit einer Spannweite von ca. 64 m berichtet. 1706 wurde die Tatu-Brücke in Lutingchiao mit einer Spannweite von fast 100 m vollendet. Die Bohlen der „Fahrbahn“ liegen auf neun eisernen handgeschmiedeten Stabketten. Berühmt wurde das Bauwerk 1935, als *Mao Tse Tung* die von Truppen der Kuomintang eingeschlossenen Kämpfer der Roten Armee über diese Brücke vor der Vernichtung rettete. Sie dient auch heute noch dem Verkehr!

Um 1830 entstehen in Europa zwei außergewöhnliche Brücken: Der englische Ingenieur *Thomas Telford* baut 1826 die 177 m weit gespannte Kettenbrücke über die Straße von Menai. Die britische Admiralität lehnte jegliche Behinderung der Schifffahrt ab und gab so den Anstoß zum Bau der größten Hängebrücke ihrer Zeit. Die Tragketten sind aus 3 m langen Flacheisen zusammengesetzt. Abwechselnd sind fünf bzw. sechs Bleche durch Bolzen verbunden worden. Noch heute ist die Brücke für den Verkehr geöffnet. Während man in England und Deutschland vorzugsweise Kettenbrücken baute, wurden in Frankreich, der Schweiz und in Amerika schon sehr früh Drahtseile verwendet. Man stützte sich auf die Tatsache, daß gezogener Draht eine größere Festigkeit annimmt. Theoretische Grundlagen stammten von *Navier*, der 1823 den „Rapport et Memoire sur les Ponts Suspendus“ veröffentlichte. Der französische Ingenieur *J. Chaley* überbrückte 1834 im schweizerischen Ort Fribourg das Saanetal mit einer Spannweite von 273 m. Jedes Trageil dieser Brücke be-

stand aus 1056 Einzeldrähten mit jeweils 3 mm Durchmesser. Der Seilstich betrug lediglich 19,28 m (1:14,2), was zu hohen Horizontalkräften führte. Bei der Montage wurden die Seile auf der Talsohle ausgelegt und von den Pylonen aus nach oben gezogen. Im Jahre 1923 mußte die Brücke abgebrochen werden.

In den USA entstand 1849 in Wheeling eine Ohio-Brücke mit 308 m Spannweite. Auch diese Drahtseilbrücke (sechs Seile mit je 550 Einzeldrähten auf jeder Brückenseite) weist mit 18,6 m (1:16,6) einen sehr geringen Seilstich auf. Ihr Erbauer *Charles Ellet* neigte die Seilebenen in einem Winkel von ca. 3,2° zueinander, was zu einer zusätzlichen horizontalen Aussteifung der nur 7,9 m breiten Brücke führte. Die Seile wurden über von einem Führungsseil abgehängte Rollen mit einem Göpelwerk eingezogen. 1855 zerstörte ein Sturm das sehr leichte Bauwerk. Der Wiederaufbau wurde vom deutschen Ingenieur *J. A. Roebling* durchgeführt, der sich auch 1849 schon für den Bau beworben hatte. Seine Brücke leistete dann mehr als 100 Jahre ihren Dienst.