

# Erweiterung der Technischen Biegelehre

## Ermittlung des zur Schnittgrößenkombination $N_x, V_y, V_z, M_z, M_y$ und $T_x$ gehörenden Verzerrungszustandes am Querschnitt

### Teil 2: Iterative Lösung der Bedingungsgleichungen, Bestätigung der Theorie durch Versuche sowie Anwendung bei einer Brückensanierung

Im ersten Teil der Veröffentlichung [1] wurden die Bedingungsgleichungen der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) hergeleitet und deren Lösbarkeit nachgewiesen. Der hier vorliegende zweite Teil zeigt, ausgehend von der Ermittlung der Spannungsresultanten, die iterative Lösung der Bedingungsgleichungen. An zwei Stahlbetonbalken (mit/ohne Vorspannung) werden die mit der ETB berechneten Verzerrungszustände den in der Realität auftretenden Verzerrungen gegenübergestellt. Eine mögliche Anwendung der Theorie wird an einer durch einen Betonierfehler geschädigten Brücke vorgestellt.

#### An Extension of the technical bending Theory

*In part one of the paper [1] the constitutive equations of the extended technical bending theory (ETB) have been deduced and the existence of a solution has been proved.*

*Part two shows the iterative solution of the constitutive equations on the basis of the evaluation of the stress resultants. Using a RC and a prestressed test beam, the state of strain using the ETB is evaluated and compared with the test results. A possible application of the theory is outlined for a bridge with a fault which occurred during concreting.*

#### 1 Zur Berechnung der Spannungsresultanten

Der Querschnitt besteht aus dem Basismaterial (Beton, Bewehrungsstahl), wobei im Beton die in Teil 1 [1] Bild 2 dargestellten Bewehrungsarten eingebettet sein können. Zur Ermittlung der Spannungsresultanten müssen zunächst die Verzerrungen der im Querschnitt liegenden Werkstoffe berechnet werden.

##### 1.1 Verzerrungen der Werkstoffe

Die zur Ermittlung der Spannungen erforderlichen Verzerrungen werden durch die Iterationsparameter  $\epsilon_{i,b}, \gamma, \epsilon_q$  ausgedrückt. Hierbei ergibt sich die Dehnung  $\epsilon_{i,i}$  folgendermaßen aus den Iterationsparametern  $\epsilon_x, \kappa_y$  und  $\kappa_z$  und der Lage  $y_i, z_i$  des Punktes  $i$  im Querschnitt:

$$\epsilon_{i,i} = \mathbf{e}_i^T \delta = \begin{vmatrix} 1 & z_i & -y_i \\ \epsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{vmatrix} = \epsilon_x + \kappa_y z_i - \kappa_z y_i \quad (1)$$

Zwecks kompakter Schreibweise wird der Index  $i$  sowohl mit der Lage des Punktes als auch mit dem Material  $i = b, \mu, f, P$ , aus dem der Punkt besteht, verbunden.

Basismaterial (b):

Die Hauptverzerrungen werden berechnet aus

$$\begin{aligned} \epsilon_{1b} &= \epsilon_{i,b} \cos^2 \varphi_b + \gamma \cos \varphi_b \sin \varphi_b + \epsilon_q \sin^2 \varphi_b \\ \epsilon_{2b} &= \epsilon_{i,b} \sin^2 \varphi_b - \gamma \cos \varphi_b \sin \varphi_b + \epsilon_q \cos^2 \varphi_b \end{aligned} \quad (2a)$$

Die Richtung  $\varphi_b$  der Hauptdehnung  $\epsilon_{1b}$  folgt hierbei aus

$$\varphi_b = \arctan \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\epsilon_{i,b} - \epsilon_{2b})} \text{ mit } \epsilon_{2b} = \frac{1}{2} \left( (\epsilon_{i,b} - \epsilon_q) - \sqrt{(\epsilon_{i,b} - \epsilon_q)^2 + \gamma^2} \right)$$

Bezogene Bewehrung ( $\mu$ ):

$$\epsilon_{\mu} = \epsilon_{i,\mu} + \epsilon_{\mu}^0 \quad (2b)$$

Flächenbewehrung (f):

$$\epsilon_f = \epsilon_{i,f} \cos^2 \beta_f + \gamma \cos \beta_f \sin \beta_f + \epsilon_q \sin^2 \beta_f + \epsilon_f^0 \quad (2c)$$

Punktbewehrung (P):

$$\epsilon_P = \epsilon_{i,P} \cos^2 \beta_P + \gamma \cos \beta_{|P} \sin \beta_{|P} + \epsilon_q \sin^2 \beta_{|P} + \epsilon_P^0 \quad (2d)$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_P &= \arctan \sqrt{z_P'^2 + y_P'^2}, \\ \beta_{|P} &= \arctan s_{|P}' \text{ und } s_{|P}' = z_P' \cos \alpha - y_P' \sin \alpha \text{ (vgl. Bild 1)}. \end{aligned}$$

Über die  $\sigma/\epsilon$ -Diagramme der Werkstoffe sind die Spannungen in den Materialien bekannt.

##### 1.2 Ermittlung der Resultanten $res_t$ und $res_nq$

Die in Gl. (5) in [1] benötigten Spannungsresultanten werden aus den zwischen den Schnitten  $s$  und  $s-1$  gelegenen Kräften der Materialien berechnet:

$$\begin{aligned} res_t(s_m) &= \sum_{b(s-1)}^{b(s)} a_b (\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \cos \varphi_b \sin \varphi_b + \sum_{f(s-1)}^{f(s)} a_f \sigma_f \cos \beta_f \sin \beta_f \\ res_nq(s_m) &= \sum_{b(s-1)}^{b(s)} a_b (\sigma_{1b} \sin^2 \varphi_b + \sigma_{2b} \cos^2 \varphi_b) + \sum_{f(s-1)}^{f(s)} a_f \sigma_f \sin^2 \beta_f \end{aligned} \quad (3)$$

Die auf die Längeneinheit bezogenen Flächen folgen aus  $a_b = A_b / \Delta s$  und  $a_f = A_f / \Delta s$ , wobei  $\Delta s$  die Länge des Scheibenelementes ist. Die bezogene Bewehrung  $\mu$  liefert wegen  $\beta_{\mu} = 0$  keinen Anteil.

### 1.3 Ermittlung der Resultanten ${}_{res}S$ , ${}_{res}S'$ und ${}_{res}S''$

Die materiellen Punkte des Basismaterials und die der Bewehrungsarten erzeugen in Längsrichtung die Kraftkomponenten  ${}_{res}N_{x,i}$ , je Material  $i = b, \mu, f, P$  sind dies im einzelnen:

$$\begin{aligned} {}_{res}N_{x,b} &= A_b(\sigma_{1b}\cos^2\varphi_b + \sigma_{2b}\sin^2\varphi_b) \\ {}_{res}N_{x,\mu} &= A_\mu\sigma_\mu \\ {}_{res}N_{x,f} &= A_f\sigma_f\cos^2\beta_f \\ {}_{res}N_{x,P} &= A_P\sigma_P\cos\beta_P \end{aligned} \tag{4}$$

Die Summe dieser Komponenten über den gesamten Querschnitt (Qu) liefert unter Beachtung aller Materialien  $i$  die in Gl. (6) aus [1] benötigten Spannungsergebnisse:

$$\begin{pmatrix} {}_{res}N_x(Qu) \\ {}_{res}M_y(Qu) \\ {}_{res}M_z(Qu) \end{pmatrix} = \sum_{Anf}^{Qu} \left( \sum_{i=b,\mu,f,P} \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ -y_i \end{pmatrix} {}_{res}N_{x,i} \right) \tag{5}$$

Mit den Vektoren  ${}_{res}S(Qu)$ ,  $e_i$  und einer kompakteren Schreibweise für die Doppelsumme wird daraus:

$${}_{res}S(Qu) = \sum_{i(Anf)}^{i(Qu)} (e_i {}_{res}N_{x,i})$$

wobei

$${}_{res}S(Qu) = \begin{pmatrix} {}_{res}N_x(Qu) \\ {}_{res}M_y(Qu) \\ {}_{res}M_z(Qu) \end{pmatrix}, e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ -y_i \end{pmatrix} \text{ mit } i = b, \mu, f, P$$

Wird hierbei beachtet, daß bei der Summierung von den Rändern (Anf) begonnen und entsprechend dem Integrationsweg von Schnitt s-1 zu Schnitt s fortgefahren wird, dann enthält  ${}_{res}S(s)$  stets den bis zum Schnitt s entstandenen Anteil der Spannungsergebnisse.

$${}_{res}S(s) = \sum_{i(Anf)}^{i(s)} (e_i {}_{res}N_{x,i}) \text{ mit } i = b, \mu, f, P \tag{6a}$$

Die in den Gln. (12) und (16) aus [1] benötigten Größen  ${}_{res}S'(s)$  und  ${}_{res}S''(s)$  folgen aus der ersten und zweiten Ableitung nach der Stabachse:

$${}_{res}S'(s) = \sum_{i(Anf)}^{i(s)} (e'_i {}_{res}N_{x,i} + e_i {}_{res}N_{x,i}') \text{ mit } i = b, \mu, f, P \tag{6b}$$

$${}_{res}S''(s) = \sum_{i(Anf)}^{i(s)} (e''_i {}_{res}N_{x,i} + 2e'_i {}_{res}N_{x,i}' + e_i {}_{res}N_{x,i}'') \tag{6c}$$

mit  $i = b, \mu, f, P$

Die Größen  ${}_{res}N_{x,i}$ ,  ${}_{res}N_{x,i}'$ ,  ${}_{res}N_{x,i}''$  sind jetzt noch durch die Iterationsparameter  $\delta, \delta', \delta''$  und  $\gamma, \epsilon_q$  auszu-drücken. Nachfolgend werden nur die Ergebnisse dargestellt. Die Herleitung ist etwas umfangreich, sie kann mit den wichtigsten Schritten in [2] nachgelesen werden.

Um die Systematik der Formeln zu zeigen, werden alle aus der Herleitung folgenden Größen aufgeführt, auch wenn sie offensichtlich Null sind.

Die Normalkraft  ${}_{res}N_{x,i}$  folgt für einen Punkt  $i$  aus:

$${}_{res}N_{x,i} = A_i(S_{l,i}(e_i^T\delta) + S_{lq,i}\gamma + S_{q,i}\epsilon_q + S_{0,i}\epsilon_i^0) \tag{7}$$

mit

$e_i^T \delta$  aus Gl. (1)

$S_{-,i}$  wirksame Elastizitätsmoduln

der Materialien  $i = b, \mu, f, P$  aus Tabelle 1

Die erste Ableitung der Normalkraft  ${}_{res}N_{x,i}'$  folgt für einen Punkt  $i$  aus:

$${}_{res}N_{x,i}' = A_i(T_{l,i} + \Delta S_{l,i})(e_i^T\delta + e_i^T\delta') \tag{8}$$

mit

$$\delta'^T = \begin{pmatrix} \epsilon_x' & \kappa_y' & \kappa_z' \end{pmatrix}$$

$$e_i^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } i = b, \mu, f; e_P^T = \begin{pmatrix} 0 & z'_P & -y'_P \end{pmatrix}$$

$T_{-,i}, \Delta S_{-,i}$  wirksame Elastizitätsmoduln der Materialien  $i = b, \mu, f, P$  aus Tabelle 2

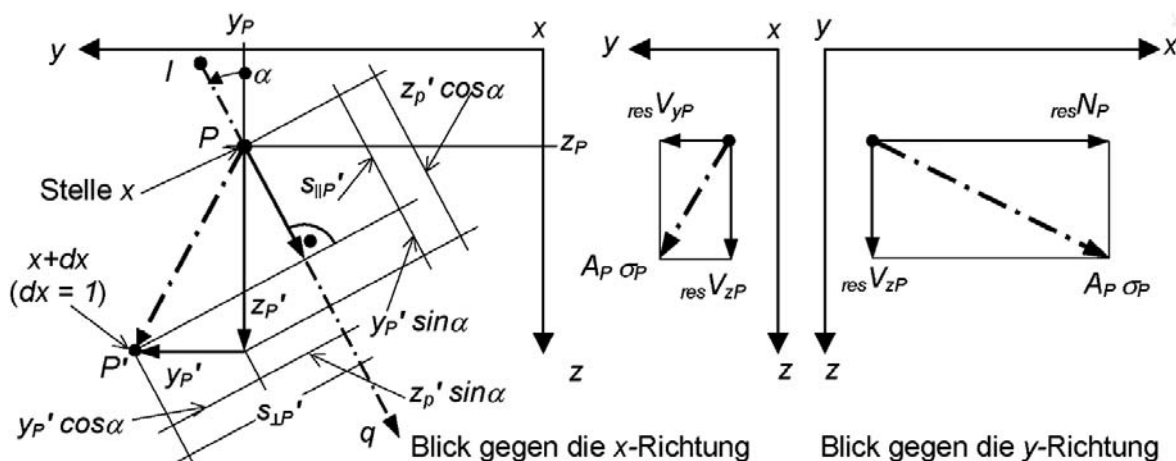


Bild 1. Geometrie und Kraftgrößen der Punktbewehrung  
Fig. 1. Geometric data and forces of the steel bar

Tabelle 1. Wirksame Elastizitätsmoduln zur Berechnung von  $resN_{x,i}$   
 Table 1. Effective modulus of elasticity to calculate  $resN_{x,i}$

E	Materialien			
Mod	b	$\mu$	f	P
$S_{l,i}$	$E_s 1_b \cos^4 \varphi_b + E_s 2_b \sin^4 \varphi_b$	$E_{s\mu}$	$E_{sf} \cos^4 \beta_f$	$E_{sP} \cos^3 \beta_P$
$S_{lq,i}$	$E_s 1_b \cos^3 \varphi_b \sin \varphi_b - E_s 2_b \cos \varphi_b \sin^3 \varphi_b$	0	$E_{sf} \cos^3 \beta_f \sin \beta_f$	$E_{sP} \cos \beta_P \cos \beta_{  P} \sin \beta_{  P}$
$S_{q,i}$	$(E_s 1_b + E_s 2_b) \cos^2 \varphi_b \sin^2 \varphi_b$	0	$E_{sf} \cos^2 \beta_f \sin^2 \beta_f$	$E_{sP} \cos \beta_P \sin \beta_{  P}^2$
$S_{0,i}$	0	$E_{s\mu}$	$E_{sf} \cos^2 \beta_f$	$E_{sP} \cos \beta_P$

$E_s$  Division der Spannung durch die Dehnung (Sekantenmodul)  
 $E_s 1_b = \frac{\sigma 1_b}{\epsilon 1_b}, E_s 2_b = \frac{\sigma 2_b}{\epsilon 2_b}, E_{s,i} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}$  für  $i = \mu, f, P$

Tabelle 2. Wirksame Elastizitätsmoduln zur Berechnung von  $resN_{x,i}'$   
 Table 2. Effective modulus of elasticity to calculate  $resN_{x,i}'$

E	Materialien			
Mod	b	$\mu$	f	P
$T_{l,i}$	$E_t 1_b \cos^4 \varphi_b + E_t 2_b \sin^4 \varphi_b$	$E_{t\mu}$	$E_{tf} \cos^4 \beta_f$	$E_{tP} \cos^3 \beta_P$
$\Delta S_{l,i}$	$\frac{1}{2} \frac{\sigma 1_b - \sigma 2_b}{\epsilon 1_b - \epsilon 2_b} \sin^2 2\varphi_b$	0	0	0

$E_t$  Erste Ableitung der Spannung nach der Dehnung (Tangentenmodul)  
 $E_t 1_b = \frac{d\sigma 1_b}{d\epsilon 1_b}, E_t 2_b = \frac{d\sigma 2_b}{d\epsilon 2_b}, E_{t,i} = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i}$  für  $i = \mu, f, P$

Tabelle 3. Wirksame Elastizitätsmoduln zur Berechnung von  $resN_{x,i}''$   
 Table 3. Effective modulus of elasticity to calculate  $resN_{x,i}''$

E	Materialien			
Mod	b	$\mu$	f	P
$K_{l,i}$	$K 1_b \cos^6 \varphi_b + K 2_b \sin^6 \varphi_b$	$K_\mu$	$K_f \cos^6 \beta_f$	$K_P \cos^5 \beta_P$
$\Delta T_{l,i}$	$\frac{1}{2} \frac{E_t 1_b \cos^2 \varphi_b - E_t 2_b \sin^2 \varphi_b}{\epsilon 1_b - \epsilon 2_b} \sin^2 2\varphi_b$	0	0	0
$\Delta \Delta S_{l,i}$	$\frac{\sigma 1_b - \sigma 2_b}{(\epsilon 1_b - \epsilon 2_b)^2} \cos 2\varphi_b \sin^2 2\varphi_b$	0	0	0

$K$  Zweite Ableitung der Spannung nach der Dehnung  
 $K 1_b = \frac{d^2 \sigma 1_b}{d\epsilon 1_b^2}, K 2_b = \frac{d^2 \sigma 2_b}{d\epsilon 2_b^2}, K_i = \frac{d^2 \sigma_i}{d\epsilon_i^2}$  für  $i = \mu, f, P$

Die zweite Ableitung der Normalkraft  $resN_{x,i}''$  folgt für einen Punkt i aus:

$$resN_{x,i}'' = A_i \left( \begin{matrix} (T_{l,i} + \Delta S_{l,i}) (e_i''^T \delta + 2e_i'^T \delta' + e_i^T \delta'') \\ + (K_{l,i} + 3\Delta T_{l,i} + \Delta \Delta S_{l,i}) (e_i'^T \delta + e_i^T \delta') \end{matrix} \right) \quad (9)$$

mit  
 $\delta''^T = \begin{vmatrix} \epsilon_x'' & \kappa_y'' & \kappa_z'' \end{vmatrix}$   
 $e_i''^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  für  $i = b, \mu, f, P$

$K_{-,i}, \Delta T_{-,i}, \Delta \Delta S_{-,i}$  wirksame Elastizitätsmoduln der Materialien  $i = b, \mu, f, P$  aus Tabelle 3

#### 1.4 Ermittlung der Resultanten $resT_x$ und $resT_x'$

In Bild 2 sind die hierzu erforderlichen Kraftgrößen dargestellt. Das Torsionsmoment  $resT_x$  und dessen Ableitung nach der Stabachse  $resT_x'$  ist somit

$$resT_x(Q_u) = \sum_{Anf}^{Qu} (\Delta V_z(s_m) y(s_m) - \Delta V_y(s_m) z(s_m)) \quad (10)$$

$$resT_x'(Q_u) = \sum_{Anf}^{Qu} (\Delta n_z(s_m) y(s_m) - \Delta n_y(s_m) z(s_m))$$

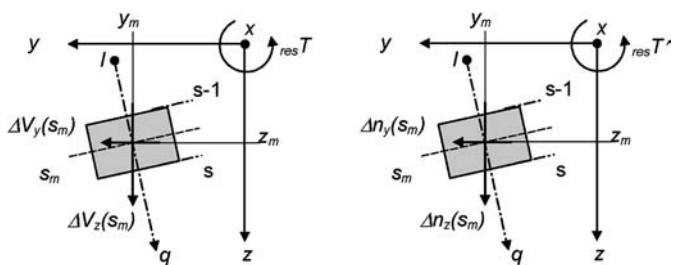


Bild 2. Kräfte zur Berechnung von  $resT_x$  und  $resT'_x$  bei Blick gegen die x-Richtung  
 Fig. 2. Forces for evaluation of  $resT_x$  and  $resT'_x$  facing the negative x-direction

mit  
 $y(s_m) = \frac{1}{2}(y(s) + y(s - 1)); z(s_m) = \frac{1}{2}(z(s) + z(s - 1))$

Die Kräfte  $\Delta V_y$  und  $\Delta V_z$  folgen aus Gl. (12),  $\Delta n_y$  und  $\Delta n_z$  folgen aus Gl. (19) aus [1].

Die Bezeichnung  $res(\ )$  ist berechtigt, da die Bedingungsgleichungen  $res^t = t$  und  $resn_q = n_q$  in der innersten Iteration erfüllt werden, vgl. Tabelle 1 aus [1].

**2 Zur iterativen Lösung**

Die iterative Lösung solch komplexer Zusammenhänge führt nur dann zum Ziel, wenn die Iteration in einer global gültigen Lösungsstruktur eingebettet abläuft. Dieser globalen Struktur sind alle noch lokal notwendigen Detaillösungen unterzuordnen. Im Rahmen dieser Veröffentlichung kann nur die auf das Problem zugeschnittene *globale* Lösungsstruktur beschrieben werden.

Bei nichtlinearem Werkstoff kann der Verzerrungszustand nur iterativ berechnet werden. Hierbei dürfen notwendige Detaillösungen die globale Iterationsstruktur nicht stören.

Die Iteration erfolgt mit dem gedämpften *Newton*-Verfahren, vgl. [3] Theorie und [4] Realisierung. Damit das Verfahren konvergiert, werden beim Startvektor alle Scheibenelemente in der Scheibenebene minimal überdrückt, was bezweckt, daß vom steifen in das weiche Werkstoffverhalten iteriert wird. Die beim *Newton*-Verfahren notwendigen Jakobimatrizen werden analytisch aufgestellt. Da die Herleitungen umfangreich sind, werden nachfolgend nur die Ergebnisse wiedergegeben. In [2] können die hierzu erforderlichen Schritte nachvollzogen werden.

**2.1 Scheibenverzerrungen  $\gamma$  und  $\epsilon_q$**

In der Ebene 5 sind die Gleichungen  $res^t = t$  und  $resn_q = n_q$  je Scheibenelement zu erfüllen. Für ein Scheibenelement zwischen den Schnitten s-1 und s läge nach der Iteration j der noch nicht korrekte, aktuelle Lösungsvektor  $\gamma^{(j)}$ ,  $\epsilon_q^{(j)}$  vor. Der Korrekturvektor  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\epsilon_q$  folgt aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} res^t|_\gamma & res^t|_{\epsilon_q} \\ resn_q|_\gamma & resn_q|_{\epsilon_q} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\epsilon_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t(s_m) - res^t \\ n_q(s_m) - resn_q \end{vmatrix} \quad (11)$$

Mit dem Dämpfungsfaktor  $\sigma$  lautet der verbesserte Lösungsvektor:

$$\gamma^{(j+1)} = \gamma^{(j)} + \sigma\Delta\gamma, \quad \epsilon_q^{(j+1)} = \epsilon_q^{(j)} + \sigma\Delta\epsilon_q$$

Die Jakobimatrix folgt aus

$$res^t|_\gamma = \sum_{b(s-1)}^{b(s)} a_b \left( \begin{matrix} (E_t1_b + E_t2_b)\cos^2\varphi_b\sin^2\varphi_b \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma1_b - \sigma2_b}{\epsilon1_b - \epsilon2_b} \cos^2 2\varphi_b \end{matrix} \right) + \sum_{f(s-1)}^{f(s)} a_f E_{tf} \cos^2\beta_f \sin^2\beta_f$$

$$res^t|_{\epsilon_q} = \sum_{b(s-1)}^{b(s)} a_b \left( \begin{matrix} E_t1_b \cos\varphi_b \sin^3\varphi_b - E_t2_b \cos^3\varphi_b \sin\varphi_b \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma1_b - \sigma2_b}{\epsilon1_b - \epsilon2_b} \cos 2\varphi_b \sin 2\varphi_b \end{matrix} \right)$$

$$resn_q|_\gamma = res^t|_{\epsilon_q} + \sum_{f(s-1)}^{f(s)} a_f E_{tf} \cos\beta_f \sin^3\beta_f$$

$$resn_q|_{\epsilon_q} = \sum_{b(s-1)}^{b(s)} a_b \left( \begin{matrix} E_t1_b \sin^4\varphi_b + E_t2_b \cos^4\varphi_b \\ + \frac{1}{2} \frac{\sigma1_b - \sigma2_b}{\epsilon1_b - \epsilon2_b} \sin^2 2\varphi_b \end{matrix} \right) + \sum_{f(s-1)}^{f(s)} a_f E_{tf} \sin^4\beta_f$$

Die Resultanten  $res^t$  und  $resn_q$  des Scheibenelementes folgen aus Gl. (3).

Die Zielfunktionen  $t(s_m)$  und  $n_q(s_m)$  folgen aus den Gln. (14) und (18) aus [1].

Der Jakobimatrix, den Resultanten und den Zielfunktionen liegt der Lösungsvektor der aktuellen Iteration j zugrunde.

**2.2 Querschnittsverzerrungen  $\delta$ ,  $\delta'$  und  $\delta''$**

In den Ebenen 1, 2 und 3 sind jeweils die Gleichungen  $resS = S$ ,  $resS' = S'$  und  $resS'' = S''$  zu erfüllen. Innerhalb einer Ebene läge nach der Iteration j der noch nicht korrekte, jeweils aktuelle Lösungsvektor  $\delta^{(j)}$ ,  $\delta'^{(j)}$  oder  $\delta''^{(j)}$  vor. Der Korrekturvektor  $\Delta\delta$ ,  $\Delta\delta'$  oder  $\Delta\delta''$  folgt aus dem jeweils der Ebene entsprechenden Gleichungssystem

$$\sum_{i(Anf)}^{i(Qu)} \left( A_i(T_{1,i} + \Delta S_{1,i})(e_i e_i^T) \right) \Delta\delta = S - resS(Qu) \quad \dots \text{Ebene:1}$$

$$\sum_{i(Anf)}^{i(Qu)} \left( A_i(T_{1,i} + \Delta S_{1,i})(e_i e_i^T) \right) \Delta\delta' = S' - resS'(Qu) \quad \dots \text{Ebene:2} \quad (12)$$

$$\sum_{i(Anf)}^{i(Qu)} \left( A_i(T_{1,i} + \Delta S_{1,i})(e_i e_i^T) \right) \Delta\delta'' = S'' - resS''(Qu) \quad \dots \text{Ebene:3}$$

Mit dem Dämpfungsfaktor  $\sigma$  lautet der jeweils verbesserte Lösungsvektor:

$$\delta^{(j+1)} = \delta^{(j)} + \sigma\Delta\delta, \quad \delta'^{(j+1)} = \delta'^{(j)} + \sigma\Delta\delta', \quad \delta''^{(j+1)} = \delta''^{(j)} + \sigma\Delta\delta''$$

Die Jakobimatrix folgt je Materialpunkt  $i = b, \mu, f, P$  aus

$$A_i(T_{l,i} + \Delta S_{l,i})(e_i e_i^T) = A_i(T_{l,i} + \Delta S_{l,i}) \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ -y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_i & -y_i \\ z_i & z_i^2 & -z_i y_i \\ -y_i & -y_i z_i & y_i^2 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die wirksamen Elastizitätsmoduln  $T_{l,i}$  und  $\Delta S_{l,i}$  der Tabelle 2 zu entnehmen.

Die Resultanten  $resS(Qu)$ ,  $resS(QuP)$ ,  $resS(Qu)''$  folgen aus Gl. (6). Der Jakobimatrix und den Resultanten liegt der Lösungsvektor der aktuellen Iteration  $j$  zugrunde.

Die Zielfunktionen  $S$ ,  $S'$  und  $S''$  sind die vorgegebenen Schnittgrößen und die Stablasten.

$$S = \begin{pmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, S' = \begin{pmatrix} -p_x \\ V_z \\ -V_y \end{pmatrix}, S'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_z \\ p_y \end{pmatrix}, \text{ vgl. Gl. (6) aus [1].}$$

### 2.3 Stabdrillung $\vartheta'$ und Schubkraft $t_0$ in den Trennschnitten

In der Ebene 4.1 sind folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$resT_x(Qu) = T_x \quad \text{je Querschnitt (Qu)}$$

$$\Delta u(ToE) = \int_{ToE} \gamma(s_m) dq - 2A_r(ToE) \vartheta'(Qu) = 0 \quad \text{je Torsionselement (ToE)}$$

- mit
- $resT_x(Qu)$  Torsionsmoment (Spannungsresultante), vgl. Gl. (10)
- $\gamma(s_m)$  Gleitung des Scheibenelementes, vgl. Gl. (11)
- $\int \gamma(s_m) dq$  Umlaufintegral der Gleitung je Torsionselement ToE
- $A_r(ToE)$  von der Mittellinie eingeschlossene Fläche des Torsionselementes

Orientiert nach dem in [5] beschriebenen Verfahren kann diese Lösung auch auf Querschnitte mit mehreren Röhren übertragen werden.

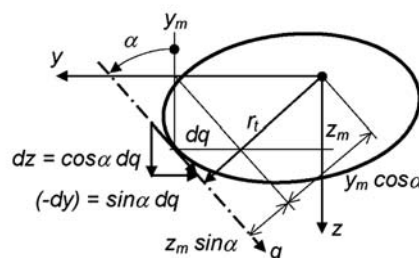
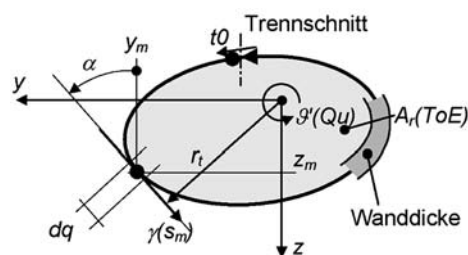


Bild 3. Geometrische Bezeichnungen am Torsionselement  
Fig. 3. Geometrical notation of the torsional element

Die iterative Lösung wird an einem Querschnitt mit einer Röhre beschrieben. In Bild 3 sind die für eine Röhre erforderlichen Größen dargestellt. Iterationsparameter sind die Drillung  $\vartheta'$  und die Schubkraft  $t_0$  im Trennschnitt. Nach der Iteration  $j$  läge der noch nicht korrekte, aktuelle Lösungsvektor  $\vartheta^{(j)}$ ,  $t_0^{(j)}$  vor. Der Korrekturvektor  $\Delta \vartheta'$ ,  $\Delta t_0$  folgt aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} resT_x|_{\vartheta'} & resT_x|_{t_0} \\ \Delta u|_{\vartheta'} & \Delta u|_{t_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \vartheta' \\ \Delta t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x - resT_x \\ 0 - \Delta u \end{pmatrix}$$

Aus den nachfolgenden Zusammenhängen können die Ableitungen gewonnen werden. Obwohl die erste Gleichung nur für dünnwandige Profile exakt zutrifft, ist dies dennoch auch auf dickwandige Profile anwendbar, denn hierdurch wird nur der Korrekturvektor beeinflusst, nicht das Endergebnis.

Aus  $resT_x \approx \int res t_r dq$  folgt:  
 $resT_x|_{\vartheta'} = 0$  und  $resT_x|_{t_0} = \int res t_{t_0} r_t dq$   
 Aus  $\Delta u = \int \gamma dq - 2A_r \vartheta'$  folgt:  
 $\Delta u|_{\vartheta'} = -2A_r$  und  $\Delta u|_{t_0} = \int \gamma|_{t_0} dq$

Schließlich entsteht das Gleichungssystem zur Berechnung des Korrekturvektors  $\Delta \vartheta'$ ,  $\Delta t_0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \int res t_{t_0} r_t dq \\ -2A_r & \int \gamma|_{t_0} dq \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \vartheta' \\ \Delta t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x - resT_x \\ 2A_r \vartheta' - \int \gamma dq \end{pmatrix} \quad (13)$$

Mit dem Dämpfungsfaktor  $s$  lautet der verbesserte Lösungsvektor

$$\vartheta^{(j+1)} = \vartheta^{(j)} + s \Delta \vartheta', \quad t_0^{(j+1)} = t_0^{(j)} + s \Delta t_0$$

Die Größe  $rt dq$  und die Ableitungen  $res t_{t_0}$  und  $gt_0$  werden noch umgeformt.

$$\begin{aligned} \int res t_{t_0} r_t dq &= \int res t_{t_0} (y_m \cos \alpha + z_m \sin \alpha) dq \\ &= \int (res t_{t_0} (y_m dz - z_m dy)) \\ res t_{t_0} &= res t_{t_y} \gamma|_{t_0} + res t_{t_{\epsilon_q}} \epsilon_q|_{t_0} \end{aligned}$$

Die Ableitungen  $res t_{t_y}$  und  $res t_{t_{\epsilon_q}}$  liegen bereits je Scheibenelement vor, vgl. Gl. (11).

Die Ableitungen  $\gamma|_{t_0}$  und  $\epsilon_q|_{t_0}$  folgen aus

$$\gamma|_{t_0} = \frac{\gamma(t + \Delta t, n_q) - \gamma(t - \Delta t, n_q)}{2\Delta t}$$

$$\epsilon_q|_{t_0} = \frac{\epsilon_q(t + \Delta t, n_q) - \epsilon_q(t - \Delta t, n_q)}{2\Delta t}$$

Hierbei werden die zur veränderten Schubkraft gehörenden Scheibenverzerrungen wie folgt numerisch berechnet:

Das Gleichungssystem  $_{res}t = t, \text{ }_{res}n_q = n_q$  besitzt die iterativ gefundene Lösung  $\gamma(t, n_q), \epsilon_q(t, n_q)$ . Analog liefert das Gleichungssystem  $_{res}t = t + \Delta t, \text{ }_{res}n_q = n_q$  die Lösung  $\gamma(t + \Delta t, n_q), \epsilon_q(t + \Delta t, n_q)$ . Ebenso folgt aus dem Gleichungssystem  $_{res}t = t - \Delta t, \text{ }_{res}n_q = n_q$ , die Lösung  $\gamma(t - \Delta t, n_q), \epsilon_q(t - \Delta t, n_q)$ .

### 2.4 Stabverwindung $\vartheta''$ und Kräfte $n_{0y}, n_{0z}$ in den Trennschnitten

In der inneren Ebene 4.2.2 sind je Torsionselement folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$\Delta v(\text{ToE}) = 0, \Delta w(\text{ToE}) = 0, \Delta \varphi(\text{ToE}) = 0$$

Die Lösung erfolgt über eine Verformungsberechnung, die an einem Querschnitt mit einer Röhre beschrieben wird. Die Übertragung des allgemein bekannten Kraftgrößenverfahrens auf mehrere Röhren ist dann nur noch Formsache. Das Grundsätzliche zum Kraftgrößenverfahren ist in [5] beschrieben. In Bild 4 sind die für eine Röhre erforderlichen Größen dargestellt. Als Belastung wirken die Stablasten  $p_{y,k}, p_{z,k}$  in den Angriffspunkten  $k$  und die Kräfte  $\Delta q_y, \Delta q_z$ , vgl. Gl. (19) aus [1], in den Scheibenelementen. Die im Trennschnitt wirkenden Unbekannten  $n_{0z}, n_{0y}$  und  $m_{0x}$  folgen aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} \delta_{zz} & \delta_{zy} & \delta_{zx} \\ \delta_{yz} & \delta_{yy} & \delta_{yx} \\ \delta_{xz} & \delta_{xy} & \delta_{xx} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_{0z} \\ n_{0y} \\ m_{0x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\delta_{z0} \\ -\delta_{y0} \\ -\delta_{x0} \end{vmatrix} \quad (14)$$

mit

$$\delta_{i0} = \int_{\text{Anf}}^{\text{End}} \bar{m}_i \frac{m_0}{EI} dq \quad \text{wirkliche Weggrößen an Ort und in Richtung i infolge der Lasten 0}$$

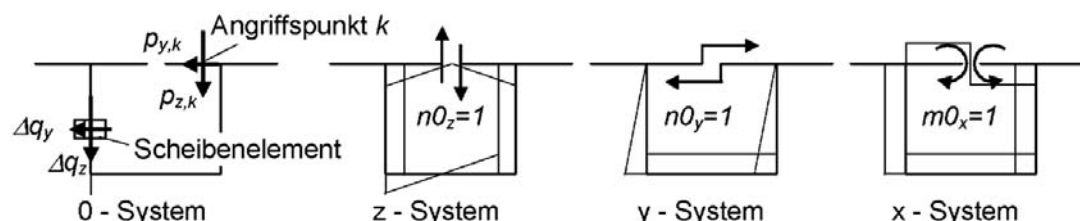


Bild 4. Systeme mit Belastung und Bezeichnungen  
Fig. 4. Structural system with load cases

$$\delta_{ik} = \int_{\text{Anf}}^{\text{End}} \bar{m}_i \frac{m_k}{EI} dq \quad \text{virtuelle Weggrößen an Ort und in Richtung i infolge der Last k}$$

Bei der Ermittlung der  $\delta_{ik}$ -Werte wird nur die Biegeverformung berücksichtigt. Werden konstante Steifigkeiten zugrunde gelegt, so entfällt die Iteration der Gruppe 4.2.2.

In der äußeren Ebene 4.2.1 sind folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$_{res}T_x'(Qu) = -m_x \quad \text{je Querschnitt (Qu)}$$

$$\Delta u'(\text{ToE}) = 0 \quad \text{je Torsionselement (ToE)}$$

Da die Unbekannten  $\vartheta''$  und  $t_0'$  die bei einer Nachweisführung einzuhaltende Verzerrungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  nicht beeinflussen, wird die Lösung des Gleichungssystems nur zwecks Vollständigkeit vorgestellt. Eine Nachweisführung mit der Erweiterten Technischen Biegelehre als Grundlage ist in [6] beschrieben.

Mit der Annahme, daß die Änderung der Torsion analog der Torsion im Querschnitt aufgenommen wird, kann mit dem der Situation angepaßten Gleichungssystem (13) der Lösungsvektor  $\vartheta''$  und  $t_0'$  berechnet werden.

$$\begin{vmatrix} 0 & \int_{res} t_{t_0} r_t dq \\ -2A_r & \int_{t_0} \varphi \gamma dq \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vartheta'' \\ t_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_x - resT_x' \\ 2A_r \vartheta'' \end{vmatrix} \quad (15)$$

Da voraussetzungsgemäß  $\gamma' = 0$  ist, entfällt das Integral  $\int \varphi \gamma dq$  auf der rechten Seite. Die Systemmatrix bedarf keiner Anpassung und kann von Ebene 4.1 übernommen werden.

### 3 Bestätigung der Erweiterten Technischen Biegelehre durch Versuche

Durch Anwendung der ETB an zwei Versuchen soll die Übereinstimmung der Theorie mit der Realität vorgestellt werden. Zur Bestätigung der Theorie wurden bereits veröffentlichte Versuche in großem Umfang nachgerechnet. Unter Berücksichtigung der dabei gewonnenen Erfahrungen sollte die Übereinstimmung mit einer Vorausberechnung demonstriert werden. Hierzu wurden zwei Großversuche an der Technischen Universität Kaiserslautern durchgeführt.

### 3.1 Versuchsprogramm

Es wurden zwei Versuchsträger mit gleichem Querschnitt hergestellt. Der erste Träger wurde mit nachträglicher Vorspannung ohne Verbund ausgeführt, der zweite als reiner Stahlbetonträger. Beide Träger wurden mit Hilfe der ETB derart dimensioniert, daß ein Versagen der Bügelbewehrung maßgebend werden sollte.

### 3.2 Trägerquerschnitt und Versuchsaufbauten

Um einen aussagekräftigen Verlauf der Spannungen über die Bügelhöhe zu erhalten, wurde ein möglichst hoher Querschnitt konzipiert. Begrenzender Faktor war dabei die maximal verfügbare Pressenkraft der Prüfeinrichtung. Für beide Träger wurde der in Bild 5 dargestellte Querschnitt gewählt. Bei dem zweiten Träger entfielen die Hüllrohre und die untere Zulage im Bereich des maximalen Momentes. Die im Träger 1 eingebauten Spannglieder wurden freundlicherweise von der Firma BBV Vorspanntechnik zur Verfügung gestellt.

Der Durchmesser und die Abstände der vertikalen Bügel wurden über die Trägerlänge so variiert, daß ein Versagen der Träger an den gewünschten Stellen sichergestellt werden konnte. Zur Erfassung der Dehnungen wurden an der Längsbewehrung und der Querkraftbewehrung im Bereich des zu erwartenden Versagens Dehnmeßstreifen (DMS) angebracht. Die Lage der für die hier vorge-

stellte Auswertung maßgebenden DMS ist in Bild 5 dargestellt.

Die Materialeigenschaften der Stähle sind in Tabelle 4 angegeben. Sie wurden im voraus durch Versuche ermittelt und der Berechnung zugrundegelegt. Die Materialeigenschaften der Betone wurden für die Vorausberechnung vorab geschätzt. Die am Tage des jeweiligen Versuchs gemessenen Steifigkeiten und Festigkeiten sind in Tabelle 5 dargestellt. Die nachfolgend vorgestellten Versuchsnachrechnungen bauen auf diesen Werten auf. In Tabelle 5 sind außerdem die Betonzugspannungen angegeben, die zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen in der Berechnung angesetzt wurden.

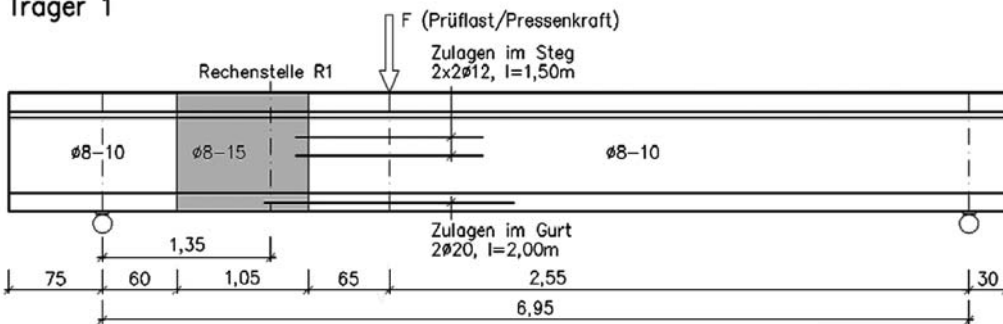
### 3.3 Vergleich des Tragverhaltens aus Berechnung und Versuch

Mit der ETB wurden die Versagenslasten der Träger berechnet und den Versagenslasten aus den Versuchen gegenübergestellt. Zur Orientierung wurden zusätzlich die Traglasten nach den Vorschriften berechnet.

#### 3.3.1 Traglasten nach DIN 1045-1 sowie DIN 4227 und DIN 1045

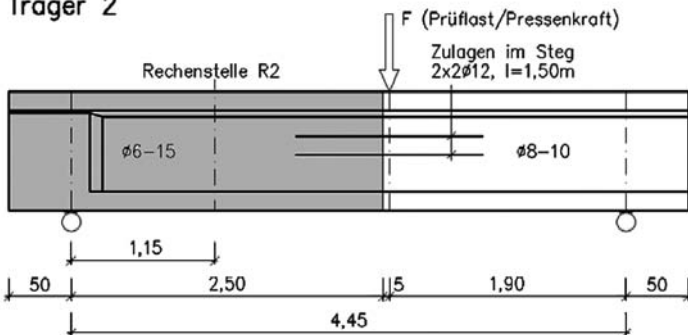
Für beide Versuchsträger wurde die Querkrafttragfähigkeit nach DIN 1045-1 ohne Berücksichtigung von Teilsicherheitsbeiwerten berechnet. Maßgebend war bei beiden

Träger 1



Vorspannung: BBV Vorspanntechnik GmbH  
 Litzen: je 1x1,4 cm<sup>2</sup>, St 1570/1770  
 Hüllrohre: d<sub>i</sub>/d<sub>e</sub> = 41/46 mm  
 Verankerung: B+B Lot

Träger 2



Querschnitt

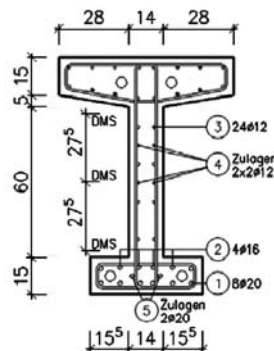


Bild 5. Betongeometrie und Bewehrung der Träger 1 und 2 sowie Stützung und Laststellung einschließlich der maßgebenden Meßstellen und Rechenstellen

Fig. 5. Concrete geometry and reinforcement detailing in the beams 1 and 2 with support and loading geometry including the determinant points of measurement and calculation

Tabelle 4. Idealisierte Materialeigenschaften der Stähle  
Table 4. Idealised steel material properties

d <sub>s</sub>	Träger 1				Träger 2				Bezeichnungen
	E <sub>0</sub>	E <sub>Z</sub>	β <sub>Z</sub>	Δβ <sub>Z</sub>	E <sub>0</sub>	E <sub>Z</sub>	β <sub>Z</sub>	Δβ <sub>Z</sub>	
6	-	-	-	-	182245	2067	550	90	
8	188170	1111	500	82	191570	801	500	61	
12	190427	0	500	36	190427	0	500	36	
16	187390	0	500	52	189348	920	550	45	
20	190000	0	500	50	193131	0	500	50	
SpSt	195000	0	1500	270	-	-	-	-	

Dimensionen: E, β in MN/m<sup>2</sup>; d<sub>s</sub> in mm

Tabelle 5. Idealisierte Materialeigenschaften der Betone  
Table 5. Idealised concrete material properties

E <sub>0</sub>	Träger 1		Träger 2		Bezeichnungen
	β <sub>bD</sub>	β <sub>bZ</sub>	β <sub>bZ,TST</sub>	β <sub>bZ,TST</sub>	
E <sub>0</sub>	24293	21665			
β <sub>bD</sub>	-24,0	-19,4			
β <sub>bZ</sub>	2,2	2,0			
Punkt	ε1 <sub>b</sub>	β <sub>bZ,TST</sub>	ε1 <sub>b</sub>	β <sub>bZ,TST</sub>	
①	0,18	2,20	0,32	2,00	
②	0,75	1,32	0,82	1,20	
③	4,29	1,10	3,58	1,00	
④	25,10	0	24,56	0	

Dimensionen: E, β in MN/m<sup>2</sup>; ε in ‰

Trägern die Tragfähigkeit der Bügel. Die aufnehmbaren Querkraften ergaben sich zu 579 kN für Träger 1 und zu 321 kN für Träger 2. Dies entspricht einer Prüflast von 865 kN bei Träger 1 und von 751 kN bei Träger 2. Hierbei wurde bei Träger 1 die im Versuch gemessene Spannstahldehnung unter der jeweiligen Last berücksichtigt.

Für Träger 1 wurde zusätzlich die Querkrafttragfähigkeit nach DIN 4227 ohne Berücksichtigung von Sicherheiten ermittelt. Dabei ergab sich eine durch die Bügel begrenzte aufnehmbare Querkraft von 474 kN. Dies entspricht einer Pressenkraft von 708 kN. Für Träger 2 wurde zusätzlich die Querkrafttragfähigkeit nach DIN 1045 ebenfalls ohne Berücksichtigung von Sicherheiten ermittelt. Dabei ergab sich eine durch die Bügel begrenzte aufnehmbare Querkraft von 199 kN. Dies entspricht einer Pressenkraft von 467 kN.

Die nach den Vorschriften berechneten Traglasten sind in Bild 6 und 7 eingetragen.

### 3.3.2 Versagenslasten nach der ETB

Um die Theorie (Berechnung) der Realität (Versuch) aussagekräftig gegenüberstellen zu können, muß das der Berechnung zugrundegelegte Werkstoffverhalten wirklichkeitsnah beschrieben werden. Hierbei geht es darum, die

für das Tragverhalten maßgebenden Einflüsse ausreichend genau zu erfassen.

Ein maßgebender Einfluß ist die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (tension-stiffening, TST). Sie wird derart erfaßt, daß bei gerissenem Beton die zwischen den Rissen veränderlichen Betonspannungen mit ihrem Mittelwert angesetzt werden. Die Mittelwerte der ansetzbaren Betonzugspannungen β<sub>bZ,TST</sub> zur Erfassung des TST-Effektes sind beanspruchungsabhängig. Die Abhängigkeit von der Hauptdehnung ε1<sub>b</sub> wurde durch vier mechanische Kriterien (1–4) genügend genau festgelegt. Die Berechnung ist in Tabelle 6 dargestellt. Am Kriterium 3 „Fließen der Bügel (nur in den Rissen)“ soll die Anwendung der Tabelle 6 erläutert werden:

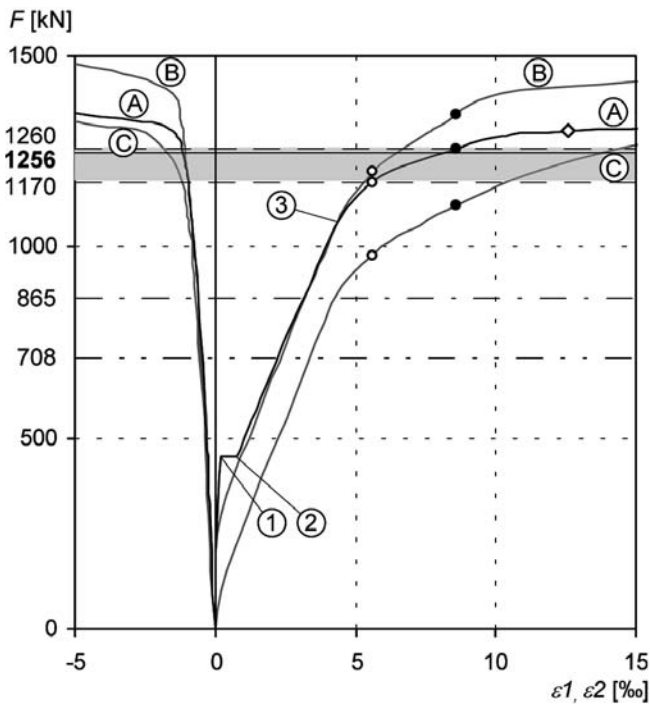
Aus der ersten Verzerrungsberechnung nach Zustand 2 (zul β<sub>bZ</sub> = 0) und der Bedingung, daß die Bügel gerade die Fließgrenze (Tabelle 4, Bezeichnung β<sub>F</sub>) überschreiten, folgt die Last F(3).

Unter der Last F(3) liefert die zweite Verzerrungsberechnung mit TST-Effekt (zul β<sub>bZ</sub> = α<sub>E</sub> β<sub>bZ</sub>) die zum Kriterium 3 gehörende Hauptdehnung ε1<sub>b</sub>(α<sub>E</sub> β<sub>bZ</sub>). Bei der Berechnung wurden die Völligkeitsbeiwerte am Anfang bzw. am Ende der sukzessiven Ribbildung zu α<sub>A</sub> = 0,6 und α<sub>E</sub> = 0,5 gewählt. Die Erfüllung der jeweiligen Bedingung wurde stellvertretend für den gesamten Steg in Stegmitte

überprüft. In der Tabelle 5 sind die mechanischen Kriterien (1-4) im  $\beta_{bz,TST}/\epsilon_{1b}$  - Diagramm eingetragen.

Die Versagenslasten wurden für die in Bild 5 dargestellten Rechenstellen R1 und R2 ermittelt. Bei einem Ver-

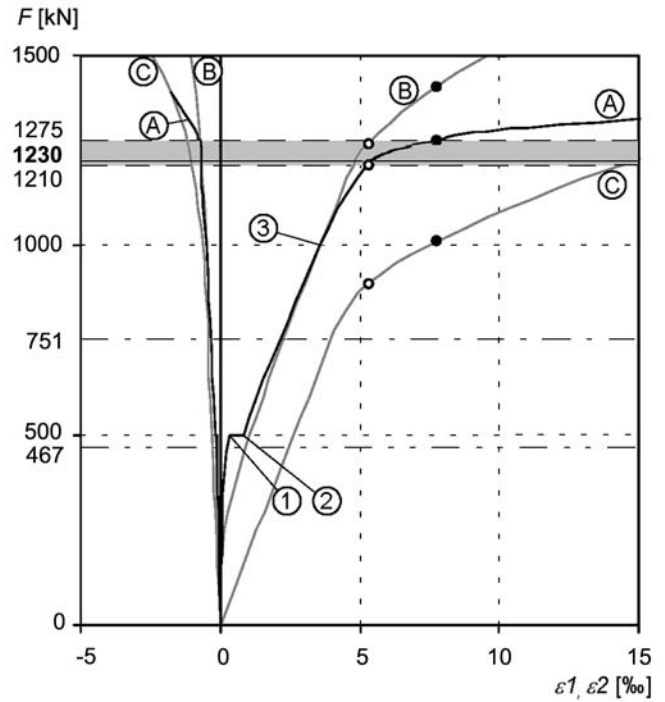
sagen der Bügelbewehrung (liegt hier vor) kann die Versagenslast durch die beiden folgenden mechanischen Kriterien eingegrenzt werden: Das Versagen tritt erst nach dem Zeitpunkt auf, an dem die Bügelbewehrung lokal an einer



**Legende:**

- Lasten: (Werte in kN)
- Versagenslast im Versuch (1256)
- Versagenslast nach ETB (1170-1260)
- Traglast nach DIN 1045-1 (865)
- Traglast nach DIN 4227 (708)
- Fließen der Bewehrung:
  - Beginn Fließen lokal im Bügel
- Bügel fließt über ges. Steghöhe
- ◇ Fließen der Längsbewehrung
- Betonzugspannungen:
  - Ⓐ zul  $\beta_{bz} = \beta_{bz,TST}$
  - Ⓑ zul  $\beta_{bz} = 0,5 \beta_{bz}$
  - Ⓒ zul  $\beta_{bz} = 0$
- $\beta_{bz,TST} / \epsilon_{1b}$  - Diagramm:
  - ① ② ③ siehe Tabelle 6

Bild 6. Trag- und Verformungsverhalten des Trägers 1  
Fig. 6. Load-bearing and deformation behaviour of beam 1



**Legende:**

- Lasten: (Werte in kN)
- Versagenslast im Versuch (1230)
- Versagenslast nach ETB (1210-1275)
- Traglast nach DIN 1045-1 (751)
- Traglast nach DIN 1045 (467)
- Fließen der Bewehrung:
  - Beginn Fließen lokal im Bügel
- Bügel fließt über ges. Steghöhe
- Betonzugspannungen:
  - Ⓐ zul  $\beta_{bz} = \beta_{bz,TST}$
  - Ⓑ zul  $\beta_{bz} = 0,5 \beta_{bz}$
  - Ⓒ zul  $\beta_{bz} = 0$
- $\beta_{bz,TST} / \epsilon_{1b}$  - Diagramm:
  - ① ② ③ siehe Tabelle 6

Bild 7. Trag- und Verformungsverhalten des Trägers 2  
Fig. 7. Load-bearing and deformation behaviour of beam 2

Tabelle 6. Zur Ermittlung der Hauptverzerrungen  $\epsilon_{1b}$  zu speziellen Betonzugspannungen  $\beta_{bz,TST}$   
Table 6. Determination of the principal strain  $\epsilon_{1b}$  to special concrete tensile stresses  $\beta_{bz,TST}$

Mechanische Kriterien		1. Verzerrungsberechnung liefert als Ergebnis: Last F(Kriterium)		2. Verzerrungsberechnung liefert als Ergebnis: Hauptverzerrung $\epsilon_{1b}(\beta_{bz,TST})$	
Zustand	Punkt	TST-Effekt	Bedingung	TST-Effekt	Bezeichnung
Erstribbildung	①	zul $\beta_{bz} = \beta_{bz}$ wie bei Punkt 1	$\sigma_{1b} = \beta_{bz}$ wie bei Punkt 1	zul $\beta_{bz} = \beta_{bz}$	$\epsilon_{1b}(\beta_{bz})$
	②			zul $\beta_{bz} = \alpha_A \beta_{bz}$	$\epsilon_{1b}(\alpha_A \beta_{bz})$
Fließen der Bügel (nur in den Rissen)	③	zul $\beta_{bz} = 0$ (Zustand 2)	$\sigma_{Bü} = \beta_{F,Bü}$	zul $\beta_{bz} = \alpha_E \beta_{bz}$	$\epsilon_{1b}(\alpha_E \beta_{bz})$
Fließen der Bügel (auch zwischen den Rissen)	④	zul $\beta_{bz} = \alpha_E \beta_{bz}$	$\sigma_{Bü} = \beta_{F,Bü}$	zul $\beta_{bz} = 0$ (Zustand 2)	$\epsilon_{1b}(0)$

$\alpha_A, \alpha_E$ : Volligkeitsbeiwerte am Anfang bzw. am Ende der sukzessiven Ribbildung; zul  $\beta_{bz}$ : zul. Betonzugspannungen bei der Berechnung

Stelle im Steg zu fließen beginnt. Das Versagen wird aber vor dem Zeitpunkt auftreten, an dem sich das zunächst nur lokale Fließen der Bügel über die gesamte Steghöhe ausgebreitet hat.

Mit diesen Versagenkriterien ergab sich für Träger 1 ein Versagensbereich von 1170 bis 1260 kN und für Träger 2 ein Bereich von 1210 bis 1275 kN. Die Versagensbereiche sind in den Bildern 6 und 7 grau markiert dargestellt. In diesen Bildern sind ferner die Verläufe der extremen Hauptdehnungen  $\epsilon_{1b}$  und  $\epsilon_{2b}$  in Abhängigkeit von der Belastung für drei verschiedene zulässige Betonzugspannungen zu  $\beta_{bZ}$  (Legende A bis C) dargestellt. Zusätzlich wird noch längs des mit TST-Effekt gerechneten Verlaufs (Legende A) auf mechanische Kriterien (Tabelle 6, Legende 1 bis 4) hingewiesen. Ferner sind dort Informationen über das Fließen der Bewehrungen (Tabelle 4, Bezeichnungen  $\beta_Z$ ) zu finden.

### 3.3.3 Versagenslasten aus den Versuchen

Bei Träger 1 trat das Versagen bei einer maximalen Last von 1256 kN durch einen Schubbruch ein. Der Bruch kündigte sich durch eine rasche Zunahme der Rißweite des letztlich maßgebenden Risses an. Etwa gleichzeitig war im oberen Drittel des Steges im Bereich des maßgebenden Schubrisses ein Versagen des Betons auf Druck zu beobachten. Bild 8 zeigt die Versagensstelle des Trägers 1. Die dort eingezeichnete Linie markiert die Rechenstelle R1. Bei Träger 2 trat das Versagen bei einer maximalen Last von 1230 kN ebenfalls durch einen Schubbruch ein. Das Versagensbild entsprach im wesentlichen dem bei Träger 1, lediglich das Versagen des Betons auf Druck blieb aus.

Bei beiden Trägern wurde das Versagen durch das Fließen der Bügelbewehrung verursacht. Ab den Versagenslasten entzogen sich die Träger einer weiteren Laststeigerung. Die Versagenslasten sind in den Bildern 6 und 7 eingetragen.

### 3.3.4 Vergleich der Versagenslasten

Der Vergleich zeigt, daß die Versagenslasten der Versuche in den berechneten Versagensbereichen liegen:

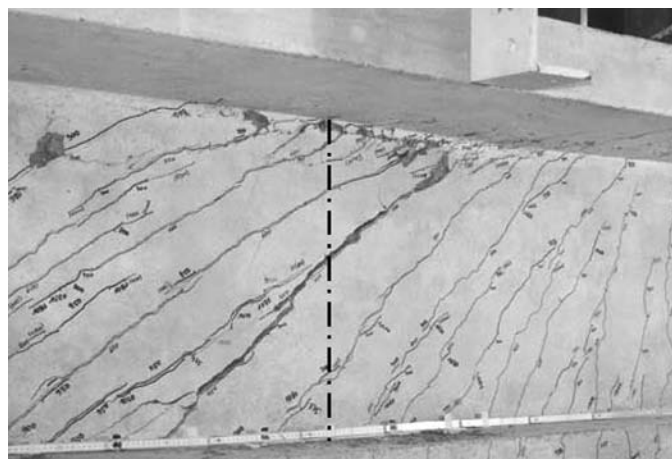


Bild 8. Versagensbild des Trägers 1 mit Rechenstelle R1  
 Fig. 8. Failure mode of beam 1 with the calculation point R1

Träger 1: 1170 < **1256** < 1260 kN

Träger 2: 1210 < **1230** < 1275 kN

Somit konnte mit Hilfe der ETB sowohl die Versagensart als auch die Versagenslasten überzeugend genau bestimmt werden. Die ETB beschreibt sogar das bei dem Träger 1 aufgetretene Versagen des Betons auf Druck, was mit Bild 6 erläutert werden soll: Unmittelbar nachdem die Bügel über die gesamte Steghöhe fließen, beginnt die untere Lage der Längsbewehrung zu fließen mit der Auswirkung, daß die Änderung der Kraft in der Längsbewehrung längs der Stabachse kleiner wird. Dies hat wiederum zur Folge, daß sich die Schubabtragung mehr in den Druckbereich des Querschnitts umlagert und die extreme Hauptstauchung  $\epsilon_{2b}$  dort schnell ansteigt, was auch Bild 6 zeigt.

### 3.4 Vergleich des Verformungsverhaltens aus Berechnung und Versuch

Mit dem vorangestellten Vergleich des Tragverhaltens wurde die Übereinstimmung von Theorie und Realität nur beim Versagen (unter Versagenslast) überprüft. Mit dem nachfolgenden Vergleich des Verformungsverhaltens wird der gesamte Belastungsbereich (zwischen Null und Versagenslast) überprüft. Dazu wird für beide Träger die berechnete Änderung der Dehnung des Spannstahls und der Bügel in Abhängigkeit von der Prüflast den gemessenen Werten gegenübergestellt.

#### 3.4.1 Spannstahldehnungen in Abhängigkeit von der Belastung

Da bei Träger 1 Vorspannung ohne Verbund ausgeführt wurde, wird mit dem Vergleich der Dehnungen in den Spannstählen die Verformung des Trägers in Stablängsrichtung in Höhe der Spannanker kontrolliert.

##### 3.4.1.1 Spannstahldehnungen nach der ETB

Bei Vorspannung ohne Verbund muß die zu einer Laständerung gehörende Änderung der Spannstahldehnung aus der zwischen den Ankern auftretenden Änderung der Betondehnung berechnet werden. Da das Programm zur Berechnung der Querschnittsverzerrungen nach der ETB noch nicht in einem Stabwerksprogramm eingebunden ist, mußte die Spannstahldehnung in Abhängigkeit von der Belastung von Hand ermittelt werden.

Für eine jeweils neue Laststufe wurden mit zunächst geschätzten Spannstahldehnungen (oben und unten) die Betonlängsdehnungen in Höhe der Spannlieder in genügend vielen Schnitten längs des Trägers mit Hilfe der ETB berechnet. Aus dieser abschnittsweise durchgeführten Dehnungsberechnung folgten die über die Trägerlänge gemittelten Betondehnungen je Spannliedlage. Die zunächst angenommenen Spannstahldehnungen waren dann richtig, wenn die berechnete Änderung der gemittelten Betondehnungen und die Änderung der geschätzten Spannstahldehnungen, jeweils gegenüber der vorhergehenden Laststufe ermittelt, einander entsprachen.

Damit nicht für jeden Schnitt und in jeder Laststufe eine solche Iteration erforderlich war, wurden zur Erfassung des TST-Effektes die zulässigen Betonzugspannungen zu  $\beta_{bZ}$ , orientiert nach dem  $\beta_{bZ,TST}/\epsilon_{1b}$ -Diagramm, für alle Schnitte links bzw. rechts der Presse je Laststufe gleich gewählt. Die derart berechneten oberen und unteren Spannstahldehnungen sind in Bild 9 dargestellt.

### 3.4.1.2 Spannstahldehnungen aus dem Versuch

Bei jeder Laststeigerung wurde die Vorspannung in jeweils einem oberen und einem unteren Spannstrang mit Kraftmeßdosen erfaßt und in entsprechende Dehnungen umgerechnet. Die aus dem Versuch folgenden Spannstahldehnungen sind ebenfalls in Bild 9 dargestellt.

### 3.4.1.3 Vergleich der Spannstahldehnungen

Die Verläufe in Bild 9 zeigen, daß im gesamten Belastungsbereich die berechneten Spannstahldehnungen sehr gut mit den gemessenen Dehnungen übereinstimmen. Hiermit wurden indirekt auch die Dehnungen in Stablängsrichtung überprüft.

## 3.4.2 Bügeldehnungen in Abhängigkeit von der Belastung

Mit dem Vergleich der Bügeldehnungen wird der Verlauf der Verzerrungen über die Steghöhe kontrolliert. Zu diesem Zweck wurden an den Rechenstellen R1 (Träger 1) und R2 (Träger 2) die Dehnungen in den Bügeln sowohl in Stegmitte als auch am oberen und unteren Steganschnitt berechnet und gemessen.

### 3.4.2.1 Bügeldehnungen nach der ETB

Im oberen und unteren Steganschnitt und in Stegmitte wurden die Bügeldehnungen für die Träger 1 und 2 be-

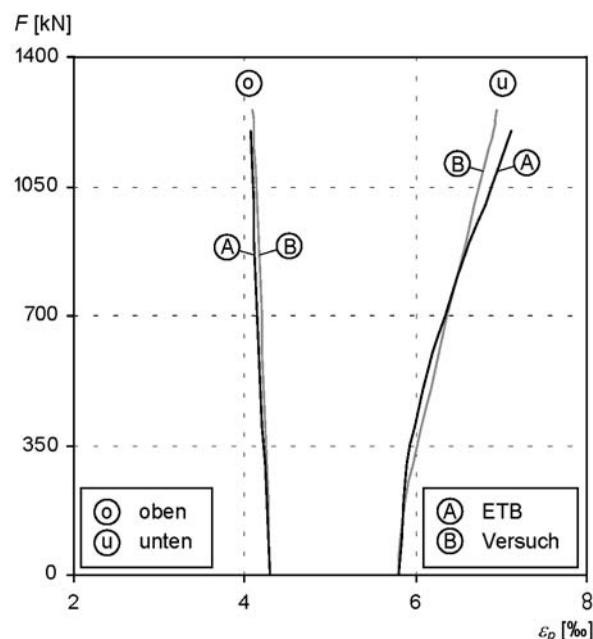


Bild 9. Spannstahldehnungen in Abhängigkeit von der Belastung  
Fig. 9. Prestressing steel strain in dependance on loading

rechnet. Die Ergebnisse sind in Bild 10 dargestellt. Bei der Berechnung wurde die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (TST) in der Weise berücksichtigt, wie dies bereits bei der Ermittlung der Versagenslasten beschrieben wurde. Demnach gehören die in den Bildern 6 und 7 dargestellten Verläufe der Hauptdehnungen  $\epsilon_{1b}$  und  $\epsilon_{2b}$  und die im Bild 10 dargestellten Bügeldehnungen (beide Legende A) zu ein und derselben Verzerrungsberechnung am Querschnitt (Rechenstelle R1 und R2). Ebenso wie bei den Hauptdehnungen wird auch bei den Bügeldehnungen auf die mechanischen Kriterien (Tabelle 6, Legende 1 bis 4) hingewiesen.

### 3.4.2.2 Bügeldehnungen aus den Versuchen

In den Versagensbereichen wurden an mehreren Bügeln DMS angebracht. Die für die Auswertung maßgebenden Meßpunkte sind in Bild 5 dargestellt. Zur Kontrolle der gemessenen Werte wurden jeweils zwei DMS an einem Meßpunkt angelegt. Die gemessenen Dehnungen sind ebenfalls in Bild 10 eingetragen.

### 3.4.2.3 Vergleich der Bügeldehnungen

Die Verläufe in Bild 10 zeigen, daß im gesamten Belastungsbereich die berechneten Bügeldehnungen sehr gut mit den gemessenen Dehnungen übereinstimmen. Hiermit wurde indirekt auch die Dehnung im Steg quer zur Stablängsrichtung überprüft.

Die Abweichungen im Bereich der Erstrißbildung (Legende 1 bis 2) sind darin begründet, daß die beanspruchungsabhängigen Betonzugspannungen  $\beta_{bZ,TST}$ , orientiert nach der Hauptdehnung  $\epsilon_{1b}$  in halber Steghöhe, festgelegt wurden. Deshalb ist auch dort (Stegmitte) nahezu keine Abweichung festzustellen und zwangsläufig beginnt im Zugbereich (unterer Steganschnitt) die Rißbildung früher und im Druckbereich (oberer Steganschnitt) dementsprechend später.

## 4 Anwendung der ETB bei einer Brückensanierung

Bei einer vorgespannten einzelligen Hohlkastenbrücke entstanden durch unsachgemäßes Verdichten des Betons in beiden Stegen sogenannte Nester im Beton (Bild 11). Als wirtschaftlichste Sanierung bot sich ein Verpressen der Nester mit Kunstharz an; hierdurch werden die Stähle optimal gegen Korrosion geschützt. Da jedoch der Elastizitätsmodul von Kunstharz gegenüber dem des Betons gering ist, mußte nachgewiesen werden, daß auch der geschwächte Querschnitt die erforderliche Tragfähigkeit besitzt.

### 4.1 Nachweis der Tragfähigkeit

Eine genaue Analyse der Nester im Beton ergibt, daß beim Nachweis der Tragfähigkeit, im mittleren Bereich der Steghöhe, die Stegbreite von 65 cm auf 55 cm zu reduzieren ist. Die daraus folgende Geometrie zeigt Bild 12. Die zur Nachweisführung erforderlichen Materialeigenschaften sind in Tabelle 7 zusammengestellt. Die Zugfestigkeit  $\beta_{bZ}$  des Betons wird nicht angesetzt. In den Stegen wird die

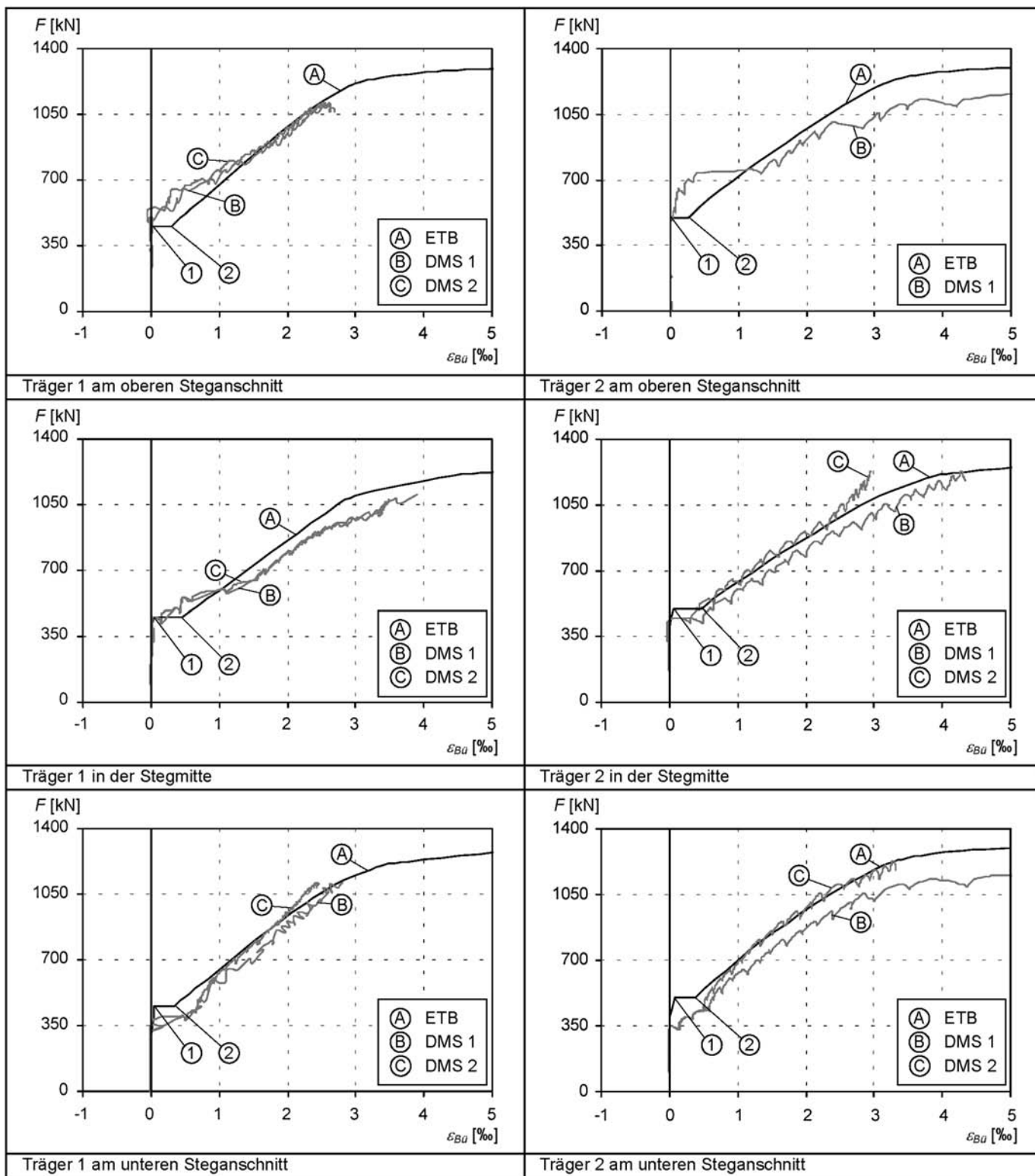


Bild 10. Bügeldehnungen in Abhängigkeit von der Belastung  
 Fig. 10. Stirrup strain in dependence on loading

Druckfestigkeit  $\beta_{bD}$  des Betons, bedingt durch Querzug, auf 80 % reduziert.

Aus den an der Schadensstelle bekannten Lastschnittgrößen  $S_{Last}$  und den Zwangsschnittgrößen  $S_{Zwang}$  folgen die unter der  $\gamma$ -fachen Last auftretenden Schnittgrößen  $S_\gamma = S_{Zwang} + \gamma S_{Last}$ . In Tabelle 8 sind die für die

Nachweisführung maßgebenden Schnittgrößenkombinationen zusammengestellt.

Nachfolgend wird nach DIN 4227 und mit der Erweiterten Technischen Biegelehre überprüft, ob trotz geschädigter Stege die geforderte Sicherheit von  $\gamma = 1,75$  gewährleistet ist.

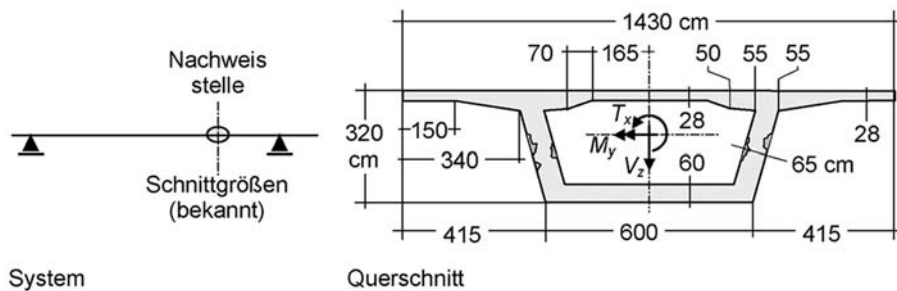


Bild 11. Lage und Umfang des Schadens  
Fig. 11. Size and position of the damage

Spannstahl mit Vordehnung:  
 $A_{z1} = 105 \text{ cm}^2, \epsilon_{zv}^{(0)} = 4.7\text{‰}$   
 $A_{z2} = 168 \text{ cm}^2, \epsilon_{zv}^{(0)} = 4.6\text{‰}$

Betonstahl (längs):  
 $A_{s1} = 56 \text{ cm}^2, A_{s2} = 56 \text{ cm}^2$   
 $A_{s3} = 40 \text{ cm}^2, \mu = 0.18 \%$

Betonstahl (quer):  
 $a_{\text{Steg}} = 98 \text{ cm}^2/\text{m}, a_{\text{Gurt,unten}} = 31 \text{ cm}^2/\text{m}, a_{\text{Gurt,oben}} = 20 \text{ cm}^2/\text{m}, a_{\text{Anschnitt,innen,oben}} = 31 \text{ cm}^2/\text{m}$

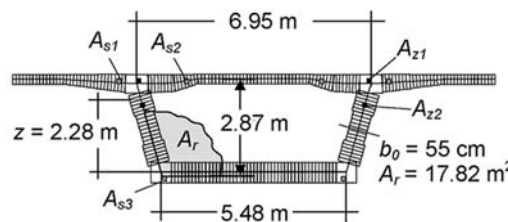


Bild 12. Reduzierter Querschnitt, Bewehrung je Querschnittshälfte  
Fig. 12. Reduced cross section, reinforcement per semi cross section

Tabelle 7. Maßgebende Materialeigenschaften  
Table 7. Relevant material properties

Beton	$E_0$	$\beta_{bZ}$	$\beta_{bD}$	Querzug	Bewehrung	$E_0$	$\beta_Z$	$\Delta\beta_Z$
B35 (Gurte)	21000	0	-21	ohne	Bst 500/550	210000	475	25
B35 (Stege)	21000	0	-17	mit	St 1570/1770	195000	1500	70

Dimensionen: E,  $\beta$  in  $\text{MN}/\text{m}^2$ ; Bedeutung: vgl.  $\sigma/\epsilon$ -Diagramme in den Tabellen 4 und 5

### 4.1.1 Sicherheit nach DIN 4227

Nach DIN 4227, Teil 1, Ausgabe 1988 besteht der Tragfähigkeitsnachweis bei der allgemeinen Schnittgrößenkombination Biegemoment, Normalkraft, Querkraft und Torsion aus folgenden Einzelnachweisen:

- Biegetragfähigkeit infolge Biegemoment mit Normalkraft,
- Schubtragfähigkeit infolge Querkraft, infolge Torsion und infolge Querkraft mit Torsion.

Da durch die Schädigung der Stege die Biegetragfähigkeit nicht beeinflusst wird, ist nur die Schubtragfähigkeit zu

Tabelle 8. Maßgebende Schnittgrößenkombinationen  
Table 8. Relevant combinations of internal forces

Bezeichnung	Herkunft		$S_\gamma = S_{Zwang} + \gamma S_{Last}$		
	Zwang	Last	$\gamma = 1.43$	$\gamma = 1.75$	$\gamma = 1.77$
$V_z$ (kN)	-188	-11953	-17281	-21106	-21344
$M_y$ (kNm)	27205	-115425	-137853	-174789	-177097
$T_x$ (kNm)	0	1994	2851	3489	3529

überprüfen. An der nachzuweisenden Stelle liegt Schubtragverhalten der Zone b vor, somit dürfen die Rechenwerte der Schubspannungen  $\tau_R$  die jeweiligen Grundwerte der Schubspannungen  $_{zul}\tau$  nicht überschreiten.

Bei der geforderten Sicherheit von  $\gamma = 1,75$  betragen die Rechenwerte der Schubspannungen:

$$\tau_{R,V} = \frac{V_z}{2b_0z} = \frac{21106}{2 \cdot 0.55 \cdot 2.28} = \frac{21106}{2.508} = 8.42 \text{ MN}/\text{m}^2$$

$$>_{zul}\tau_V = 7.0 \text{ MN}/\text{m}^2$$

$$\tau_{R,T} = \frac{T_x}{b_0 2A_r} = \frac{3489}{0.55 \cdot 2 \cdot 17.82} = \frac{3489}{19.602} = 0.18 \text{ MN}/\text{m}^2$$

$$<_{zul}\tau_T = 4.2 \text{ MN}/\text{m}^2$$

$$\tau_{R,V+T} = 8.42 + 0.18 = 8.60 \text{ MN}/\text{m}^2$$

$$>_{zul}\tau_{V+T} = 7.0 \text{ MN}/\text{m}^2$$

Der Vergleich mit den Grundwerten zeigt, daß die Schubtragfähigkeit nach DIN 4227 nicht mehr gewährleistet ist. Bei der Sicherheit von  $\gamma = 1,43$  entspricht der Rechenwert der Schubspannungen dem Grundwert der Schubspannung:

$$\tau_{R,V+T} = \frac{17281}{2.508} + \frac{2851}{19.602} = 6.89 + 0.14 = 7.03 \text{ MN/m}^2$$

$$\approx \text{zul} \tau_{V+T} = 7.0 \text{ MN/m}^2$$

Die geforderte Sicherheit von  $\gamma = 1,75$  ist um 18 % unterschritten.

**Ergebnis:** Bei einer Nachweisführung nach DIN 4227 ist eine Sanierung mit Kunstharz nicht möglich.

#### 4.1.2 Sicherheit nach ETB

Da sich in den Vorschriften für die Schubnachweise einzig und allein die Fachwerkanalogie etabliert hat, muß die mit der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) mögliche Nachweisführung vorab definiert werden.

Hierzu wird der bewährte Biegenachweis (Dehnungsnachweis) allgemeiner formuliert:

– Beim Nachweis der Biegetragfähigkeit liefert die Technische Biegelehre (TB) für die Schnittgrößenkombination *Biegemoment mit Normalkraft* die Verzerrungen  $\epsilon_1$  in Stablängsrichtung im Querschnitt.

Der Nachweis ist erfüllt, wenn gilt:

$$\text{zul}\epsilon_{1, \text{Druck}} \leq \min\epsilon_1 \quad \text{und} \quad \max\epsilon_1 \leq \text{zul}\epsilon_{1, \text{Zug}}$$

mit  $\min\epsilon_1, \max\epsilon_1$  extreme Verzerrungen im Querschnitt

$\text{zul}\epsilon_{1, \text{Druck}}, \text{zul}\epsilon_{1, \text{Zug}}$  zulässige Grenzwerte der Verzerrungen in Stablängsrichtung

– Beim allgemeiner formulierten Nachweis der Tragfähigkeit liefert die ETB für die allgemeine Schnittgrößenkombination *Biegemoment, Normalkraft, Querkraft und Torsion* die Hauptverzerrungen  $\epsilon_{1b}$  und  $\epsilon_{2b}$  im Querschnitt.

Der Nachweis ist erfüllt, wenn gilt:

$$\text{zul}\epsilon_2 \leq \min\epsilon_{2b} \quad \text{und} \quad \max\epsilon_{1b} \leq \text{zul}\epsilon_1$$

mit  $\min\epsilon_{2b}, \max\epsilon_{1b}$  extreme Hauptverzerrungen im Querschnitt

$\text{zul}\epsilon_2, \text{zul}\epsilon_1$  zulässige Grenzwerte der Hauptverzerrungen

In den Vorschriften sind nur für die Schnittgrößenkombination *Biegemoment mit Normalkraft* zulässige Grenzwerte der Verzerrungen in Stablängsrichtung angegeben:

$$\text{zul}\epsilon_{1, \text{Zug}} = 5.0 \text{ ‰ (DIN 1045, 4227), } 20 \text{ ‰ (EC 2), } 25 \text{ ‰ (DIN 1045-1)}$$

$$\text{zul}\epsilon_{1, \text{Druck}} = -3.5 \text{ ‰ Randbereich, } -2.0 \text{ ‰ Mittenbereich (DIN 1045, 4227, EC 2, DIN 1045-1)}$$

(im Detail: vgl. DIN 4227, Teil 1, Ausgabe 1988, Bild 8: Dehnungsdiagramm)

Für die allgemeine Schnittgrößenkombination werden in den Vorschriften keine zulässigen Grenzwerte der Hauptverzerrungen angegeben.

Da für die Schnittgrößenkombination *Biegemoment mit Normalkraft* beide Verfahren (TB und ETB) den gleichen Verzerrungszustand (eine Dehnungsebene) liefern,

können die zulässigen Grenzwerte der Vorschrift bei der Erweiterung auf die allgemeine Schnittgrößenkombination eine gute Orientierung geben.

Um bei der Erweiterung auf der sicheren Seite zu liegen, werden bei der allgemeinen Schnittgrößenkombination die kleineren der zulässigen Grenzwerte genutzt.

$$\text{zul}\epsilon_1 = 5.0 \text{ ‰} \quad \text{und} \quad \text{zul}\epsilon_2 = -2.0 \text{ ‰}$$

Mit der Wahl des kleineren Wertes von  $\text{zul}\epsilon_2$  soll der Gefahr eines plötzlichen Versagens auf Druck (Bruch ohne Vorankündigung) entgegengewirkt werden.

Nach dieser Vorbereitung wird nun endlich überprüft, ob die geforderte Sicherheit von  $\gamma = 1,75$  noch gewährleistet ist. Hierzu wird unter der 1,75-fachen Last und den Werkstoffdaten der Tabelle 7 der Verzerrungszustand mit der ETB berechnet.

Aus dieser Berechnung zeigt Bild 13 die Hauptverzerrungen  $\epsilon_{1b}$  und  $\epsilon_{2b}$  in den Scheiben, die Hauptdruckspannungen  $\sigma_{2b}$  im Beton und die Stahlspannungen  $\sigma_{\text{quer}}$  in den Bewehrungen der Querrichtung. Es sind dies die Spannungen in den Bügeln der Stege und die Spannungen in der Querbewehrung der Gurtscheiben. Aus Bild 13 links kann für die höher beanspruchte, rechte Querschnittshälfte abgelesen werden:

$$\max\epsilon_{1b} = 4.62 \text{ ‰} < 5.0 \text{ ‰} = \text{zul}\epsilon_1$$

$$\min\epsilon_{2b} = -1.60 \text{ ‰} > -2.0 \text{ ‰} = \text{zul}\epsilon_2$$

Unter der 1,75-fachen Last sind im Steg die zulässigen Grenzwerte eingehalten. Mit diesem Vergleich ist der Nachweis der Tragfähigkeit erbracht. Demnach ist trotz der Stegschwächung die geforderte Sicherheit gewährleistet.

**Ergebnis:** Bei einer Nachweisführung mit der ETB ist die Sanierung mit Kunstharz möglich.

Zur Ermittlung der vorhandenen Sicherheit und zur differenzierteren Beurteilung des Tragverhaltens werden noch die Zustandsflächen der höher beanspruchten Querschnittshälfte unter der 1,43-fachen Last (Traglast nach DIN 4227) und unter der 1,77-fachen Last in Bild 14 (analog Bild 13) dargestellt. Aus dem Vergleich der Hauptstauchungen im rechten Steg  $\epsilon_{2b}(\gamma = 1,75) = -1,60 \text{ ‰}$  und  $\epsilon_{2b}(\gamma = 1,77) = -3,21 \text{ ‰}$  folgt rechnerisch eine Sicherheit von  $\gamma \approx 1,76$ . Bei weiterer Laststeigerung wird der Bruch durch ein Versagen des Betons auf Druck im Steg ausgelöst.

Auf zwei mechanische Zusammenhänge sei noch hingewiesen:

Unter der 1,77-fachen Last treten in der unteren Gurtplatte und im Steg unten nahezu gleich große Hauptstauchungen ( $-1,32$  und  $-1,33 \text{ ‰}$ ) auf, die jeweils zugehörigen Hauptdruckspannungen ( $-18,6$  und  $-16,5 \text{ MN/m}^2$ ) unterscheiden sich jedoch stark. Dies ergibt sich durch die in Tabelle 8 angegebene Abminderung der Druckfestigkeit im Steg.

Bei der Laststeigerung ( $\gamma = 1,43, 1,75, 1,77$ ) nimmt am rechten Kragarmanschnitt die Stahlspannungen ( $\sigma_{\text{quer}} = 393$ ,

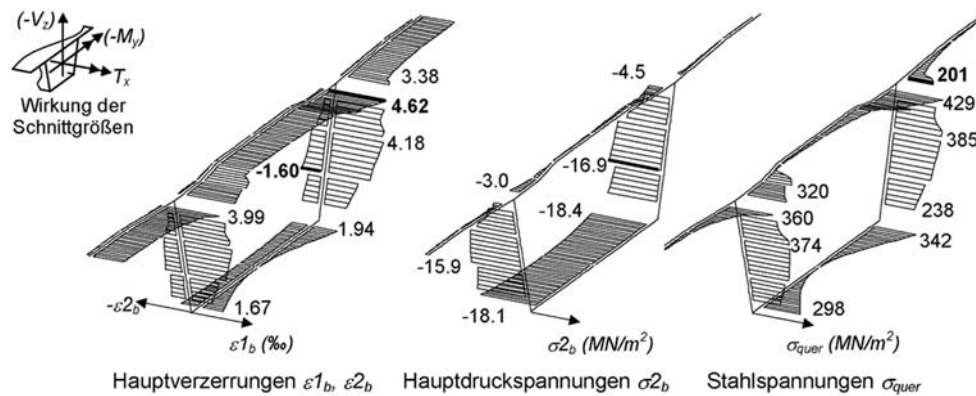


Bild 13. Zustandsflächen unter 1.75-facher Last  
 Fig. 13. Areas of state under load factor 1.75

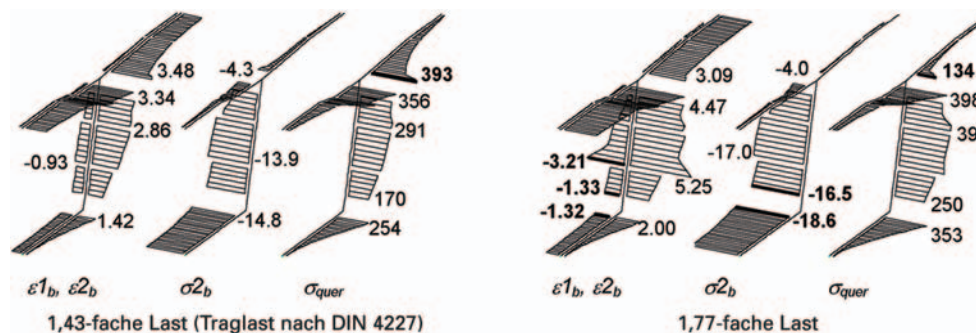


Bild 14. Zustandsflächen unter 1,43-facher und unter 1,77-facher Last  
 Fig. 14. Areas of state under load factor 1.43 and 1.77

201, 134 MN/m<sup>2</sup>) ab, was zunächst widersprüchlich erscheint. Dies liegt jedoch darin begründet, daß die Längsbewehrung im Obergurt zu fließen beginnt, mit der Folge, daß trotz Erhöhung der Last die Änderung der Normalkraft längs der Stabachse im gezogenen Gurt abnimmt und hierdurch die Schubkraft im Gurt zwangsläufig kleiner wird.

### 5 Zusammenfassung und Anwendungsmöglichkeiten

Im Teil 1 [1] werden, orientiert nach der Technischen Biegelehre (TB), die Bedingungsgleichungen der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) hergeleitet und ihre Lösbarkeit nachgewiesen. Mit der ETB kann somit der zur allgemeinen Schnittgrößenkombination ( $N_x, V_y, V_z, M_z, M_y$  und  $T_x$ ) gehörige Verzerrungszustand allein mit einer Berechnung am Querschnitt ermittelt werden. Im Teil 2 wird vorab die iterative Lösung global beschrieben. Anschließend wird an zwei Versuchen (mit und ohne Vorspannung) nachgewiesen, daß mit der Theorie die Realität gut erfaßt wird, und zwar vom Lastbeginn an bis hin zur Versagenslast. Dies zeigt, daß die Theorie sowohl für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (SLS) als auch für den Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS) genutzt werden kann. Ferner wird vorgestellt, wie durch Anwendung der ETB eine geschädigte Brücke wirtschaftlich saniert werden konnte.

Demnach kann die ETB bei z. B. den drei folgenden Gebieten genutzt werden:

(1) Zur Klärung der Lastabtragung bei Schub infolge Querkraft und Torsion.

Für bestimmte Beanspruchungssituationen fehlen noch immer schlüssige Modelle der Lastabtragung. Drei Situationen seien aufgeführt:

- Wie verläuft der Schubfluß im Querschnitt, wenn sich die im Zugbereich liegende Längsbewehrung (a) im elastischen und (b) im plastischen Zustand befindet?
- Welchen Anteil der gesamten Querkraft übertragen (a) die Gurte und (b) der Steg?
- Wie wird der Kreisschub infolge Torsion in einem Hohlquerschnitt über einen vollständig im Zugbereich liegenden Gurt übertragen?

Mit den hergeleiteten Algorithmen der ETB, unterstützt durch die vom Rechenprogramm erstellten Graphiken, kann das Trag- und Verformungsverhalten verständlich gemacht werden.

(2) Bei der Lösung von Aufgaben im Brückenbau.

Bei der Brückenbetreuung treten immer häufiger folgende Aufgaben auf:

- Einstufung in eine höhere Brückenklasse,
- Nachweis der Tragfähigkeit für einen Schwerlastentransport,
- Nachweise zur Ertüchtigung geschädigter Brücken.

Bei solchen Situationen sind die Nachweise der Tragfähigkeit meist nicht mehr erfüllt. Bei Nachrechnungen mit der ETB können die Nachweise der Tragfähigkeit dennoch erfüllt sein, was darin begründet ist, daß bei der ETB durch lokale Umlagerungen im Querschnitt alle Tragreserven genutzt werden.

(3) Bei der Weiterentwicklung der Nachweisführung.

Weil mit der ETB der zur allgemeinen Schnittgrößenkombination gehörige Verzerrungszustand berechnet wird, kann den Biege- und Schubnachweisen ein und dieselbe mechanisch korrekte Theorie zugrundegelegt werden. Dies bietet folgende Vorteile:

- Der Nachweis der Rißbreite wird leistungsstärker, denn die TB liefert nur die Grundlage zur Berechnung der Biegerisse, wohingegen die ETB zusätzlich die Grundlage zur Berechnung der Schubrisse bereitstellt.
- Der Nachweis der Tragfähigkeit wird kompakter, denn der aus drei Teilen bestehende Nachweis: (a) Biegetragfähigkeit infolge M mit N, (b) Schubtragfähigkeit infolge V oder T und zusätzlich (c) Schubtragfähigkeit infolge V plus T kann durch den einen Tragfähigkeitsnachweis infolge M, V und T, geführt mit der ETB, ersetzt werden. Die mit der Fachwerkanalogie zu führenden Schubnachweise sind nicht mehr erforderlich.

Bei einer solchen Weiterentwicklung der Nachweisführung kann die Berechnung der Schnittgrößen unverändert beibehalten werden. Nur das Nachweisformat vom bisherigen Biegenachweis ist sinngemäß auf die allgemeine Schnittgrößenkombination zu übertragen.

### Literatur

- [1] Hartung, B. und Krebs, A.: Erweiterung der Technischen Biegelehre. Teil 1. In: Beton- und Stahlbetonbau 99, 2004, H. 5, S. 378 bis 387. Ernst & Sohn, Berlin.
- [2] Hartung, B.: Zur Mechanik des Stahlbetonbalkens, Dissertation, TH Darmstadt 1985.
- [3] Bronstein, N. I., Semendjajew, K. A., Musiol, G. und Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik, Thun-Frankfurt/Main, Verlag Harri Deutsch, 2000, 2001.

[4] Engeln-Müllges G. und Reutter, F.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen, Mannheim-Wien-Zürich, Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, 1990.

[5] Czerwenka, G. und Schnell, W.: Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I, Hochschultaschenbücher 124/124a, Mannheim, Bibliographisches Institut 1967.

[6] Hartung, B.: Zur Nachweisführung im Spannbeton- und Stahlbetonstab, Bauinformatik Journal 2000, H. 3, S. 39-44.



Prof. Dr.-Ing. Albert Krebs  
Krebs und Kiefer, Beratende Ingenieure  
Hilpertstraße 20  
64295 Darmstadt  
kr@da.kuk.de



Prof. Dr.-Ing. Jürgen Schnell  
Technische Universität Kaiserslautern  
Bauingenieurwesen, Massivbau und  
Baukonstruktionen  
Erwin-Schrödinger-Straße  
67663 Kaiserslautern  
jschnell@rhrk.uni-kl.de



Dr.-Ing. Bernhard Hartung  
Krebs und Kiefer, Beratende Ingenieure  
Hilpertstraße 20  
64295 Darmstadt  
hg@da.kuk.de

### Sicherung und Sanierung von Rutschhängen mit selbstbohrenden Drainageröhren

Weltweit kommt es jährlich zu einer großen Zahl von Hangabrutschen mit hohen Personen- und Materialschäden und -verlusten. Besonders rutschgefährdet sind Lagerungssysteme aus homogenen, feinkörnigen und durchlässigen Böden auf einer geneigten natürlichen Trennfläche, wie zum Beispiel auf einer Stauerschicht oder auf Fels, Geschiebemergel oder Flysch. Dringt Oberflächenwasser durch die aufgelagerte durchlässige Oberbodenschicht, bewirkt die natürliche Trennfläche einen Wasserrückstau. Dadurch erhöht sich nicht

nur die Masse des am Ende wassergesättigten Oberbodens, sondern das Stauwasser verringert auch die Reibung zwischen der Trennschichtoberfläche und dem auflastenden Boden, was zu einem Anstieg der Abgleitgefahr führt.

Ziel einer Drainage rutschgefährdeter Hänge ist es, das nicht mehr von den Bodenporen aufnehmbare freie Bodenwasser nicht über die Trennschichtoberfläche abfließen zu lassen, sondern es im Innern der auflastenden Bodenschicht abzufangen und gefaßt nach außen abzuführen.

Im Rahmen eines Forschungsprogramms wurden an der Universität Siegen Drainageversuche mit einem selbstbohrenden Drainagerohr Titan 40/20

durchgeführt, einem Stahlrohr mit 40 mm Außendurchmesser und einer Längsbohrung von 20 mm Durchmesser. Es war in Längsrichtung im Abstand von 250 mm mit 10 mm-Querbohrungen versehen, woraus sich eine Wassereintrittsfläche von 3,2 cm<sup>2</sup>/m ergab. Das geprüfte selbstbohrende Drainagerohr kann aus einem Quadratmeter des wassergesättigten Versuchsbodens 9,9 l/min freies Bodenwasser abführen. Da selbst bei einem üblichen Starkregen nur mit einem Niederschlag von 120 l/s ha bzw. 0,72 l/min m<sup>2</sup> zu rechnen ist, ist es also in der Lage, diesen Wasseranfall abzuführen.