

Zur Nachweisführung im Stahlbeton- und Spannbetonstab

Dr.-Ing. Bernhard
Hartung
Krebs und Kiefer,
Beratende
Ingenieure für das
Bauwesen GmbH,
Darmstadt

Nach den aktuellen Vorschriften setzt sich der Nachweis der Tragfähigkeit bei der allgemeinen Schnittgrößenkombination (Biegemoment, Normalkraft, Querkraft und Torsionsmoment) aus mehreren Einzelnachweisen zusammen. Es sind der Biegenachweis (M und N) und die zwei Schubnachweise (Q und $Q+T$).

Mit der Berücksichtigung der Gleitung beim Verzerrungszustand wird die Technische Biegelehre (TB) derart erweitert, dass der zur allgemeinen Schnittgrößenkombination gehörige Gesamtbeanspruchungszustand berechnet werden kann. Dies ermöglicht den Nachweis der Tragfähigkeit auf nur einen einzigen Nachweis zu reduzieren.

Mit der Erweiterten Technischen Biegelehre (ETB) als Grundlage können auch die Nachweise unter Gebrauchslast wirklichkeitsnah geführt werden; ferner kann die Nachweisführung im Stahlbetonbau, Spannbetonbau, Verbundbau und Stahlbau vereinheitlicht werden.

Abstract

According to the current codes, the check of the load capacity for the general load combination (bending moment, axial force, shear force, and twisting moment) consists of several individual checks. These are the bending check (M and N) and the two shearing checks (Q and $Q+T$).

By considering the shearing strain, the technical bending theory (TB) is extended in such a manner that the distortion status involved in the general load combination can be calculated. This means that the load capacity can be demonstrated with only one check.

The extended technical bending theory (ETB) also allows the checks for live loads to be carried out very realistically; furthermore, the methods of check for reinforced concrete, prestressed concrete, composite construction and steel construction can be unified.

Vorliegende Situation

Bei linearem Werkstoffverhalten kann der Gesamtbeanspruchungszustand (Verzerrungen und Spannungen) durch die Überlagerung der einzelnen Beanspruchungszustände gebildet werden.

Bedingt durch das nichtlineare Werkstoffverhalten von Beton und Stahl geht im Stahlbeton und Spannbeton die Linearität verloren. Der Gesamtbeanspruchungszustand muss direkt als solcher berechnet werden.

Im Widerspruch hierzu lassen die aktuellen Vorschriften beim Nachweis der Tragfähigkeit die Überlagerung einzelner Beanspruchungszustände zu.

Der zur Zeit aktuelle Tragfähigkeitsnachweis

Im allgemeinen Fall muss nachgewiesen werden, dass alle 6 Schnittgrößen im Stab (N , M_y , M_z , Q_y , Q_z und T) vom Querschnitt aufgenommen werden können.

Die aktuellen Vorschriften für den Stahlbeton und Spannbeton (DIN 1045, DIN 4227, EC2) haben folgenden Aufbau, wenn die Tragfähigkeit eines Querschnittes für alle 6 Stabschnittgrößen nachzuweisen ist:

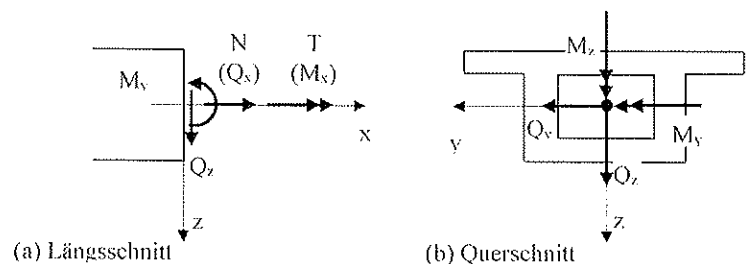


Bild 1:
Querschnitt mit den
Schnittgrößen als
Belastung

- In einem ersten Schritt ist nachzuweisen, dass die Schnittgrößen N , M_y und M_z vom Querschnitt aufgenommen werden können. Diesem Nachweis gegen Biegebruch liegt die bewährte Technische Biegelehre zugrunde, sie erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen, sie erfüllt die Verträglichkeitsbedingungen und sie berücksichtigt die Werkstoffe Beton und Stahl wirklichkeitsnah.
- In einem zweiten Schritt ist nachzuweisen, dass zusätzlich die Schnittgrößen Q_y und Q_z vom Querschnitt aufgenommen werden können.

Diesem Nachweis gegen Schubbruch infolge Querkraft liegt die Fachwerkanalogie zugrunde, sie erfüllt nur die Gleichgewichtsbedingungen.

- In einem letzten Schritt ist nachzuweisen, dass noch zusätzlich das Torsionsmoment T vom Querschnitt aufgenommen werden kann. Diesem Nachweis gegen Schubbruch infolge $Q+T$ liegt ebenfalls die Fachwerkanalogie und eine vektorielle Überlagerung zugrunde; Fachwerkanalogie und vektorielle Überlagerung erfüllen nur die Gleichgewichtsbedingungen.

Bei der Fachwerkanalogie wird die fehlende Verträglichkeitsbedingung durch empirische Formeln für die anzusetzende Druckstrebenneigung ersetzt. Die Eichung der Formeln erfolgte über Versuche, orientiert nach dem Bruchzustand. Für die Dimensionierung der Schubbewehrung sind Fließspannungen anzusetzen.

Dies begründet, dass hiermit nur der Bruchzustand erfasst und dimensioniert werden kann.

Die Erweiterte Technische Biegelehre (ETB)

Aufbauend auf [1] wurde die bewährte Technische Biegelehre durch die Eingliederung der Gleitung und Berücksichtigung der wirklichkeitsnahen Werkstoffgesetze derart erweitert, dass für alle 6 Stabschnittgrößen (N , M_y , M_z , Q_y , Q_z und T) der dazugehörigen Verzerrungszustand berechnet werden kann.

Hierzu ist der Querschnitt in Scheiben und Knotenbereiche aufzulösen. Die Scheiben werden nochmals unterteilt, so dass Scheibenelemente entstehen. Die Knotenbereiche und die Scheibenelemente werden anschließend in diskrete Punkte aufgelöst. Im Querschnitt können einzelne Bewehrungsstränge angeordnet sein, sie können parallel

zur Stabachse, aber auch geneigt dazu verlaufen. In den Stegen können Bügel und in den Gurtscheiden Querbewehrungen angeordnet sein, beide rechtwinklig oder schräg zur Stabachse verlaufend.

Bei im Verbund liegender Bewehrung folgt die Zusatzdehnung aus der Verzerrung des Scheibenelementes in Richtung der Bewehrung (starrer Verbund). Bei nicht im Verbund liegender Bewehrung erhält die Bewehrung keine Zusatzdehnung (kein Verbund).

Bei der Erweiterten Technischen Biegelehre werden die Gleichgewichtsbedingungen, die Verträglichkeitsbedingungen und die Werkstoffgesetze erfüllt. Durch die Berücksichtigung der Gleitung können an jeder Stelle im Querschnitt die Scheibenverzerrungen ($\epsilon_{\text{längs}}$, γ und ϵ_{quer}) berechnet werden.

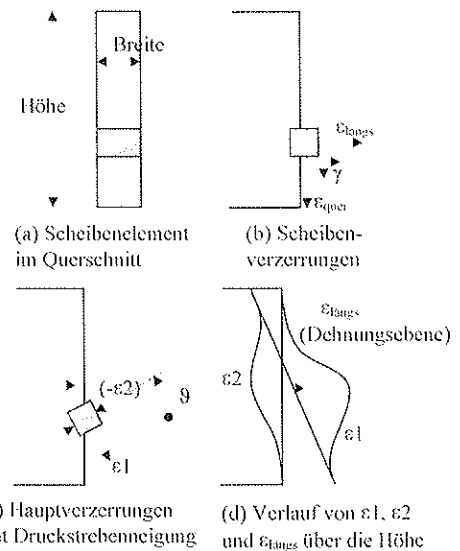


Bild 4: Verzerrungszustand in einem Scheibenelement

Aus den Scheibenverzerrungen folgen die Hauptverzerrungen ϵ_1 und ϵ_2 mit der Druckstrebenneigung ϑ ; sie sind die Grundlage der nachfolgend beschriebenen Nachweisführung.

Der allgemeiner formulierte Nachweis der Tragfähigkeit

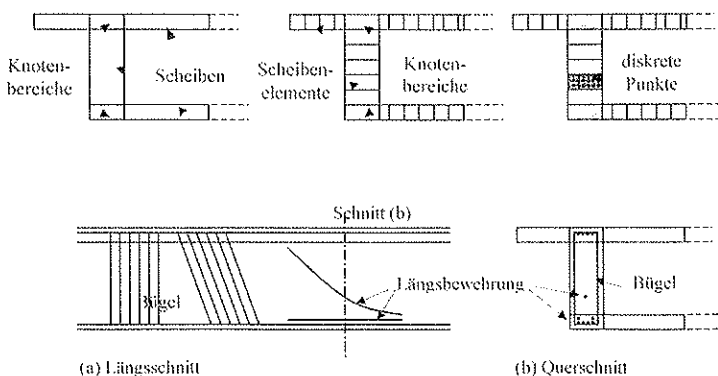
Der Nachweis der Tragfähigkeit ist dann erfüllt, wenn die berechneten Hauptverzerrungen im Querschnitt ($\text{cal } \epsilon_1$, $\text{cal } \epsilon_2$) kleiner sind als die durch Vorschriften und Erfahrung festgelegten zulässigen Grenzwerte ($\text{zulgr } \epsilon_1$, $\text{zulgr } \epsilon_2$).

Nachweisführung

$$\text{zulgr } \epsilon_2 \leq \text{cal } \epsilon_2 \text{ und } \text{cal } \epsilon_1 \leq \text{zulgr } \epsilon_1$$

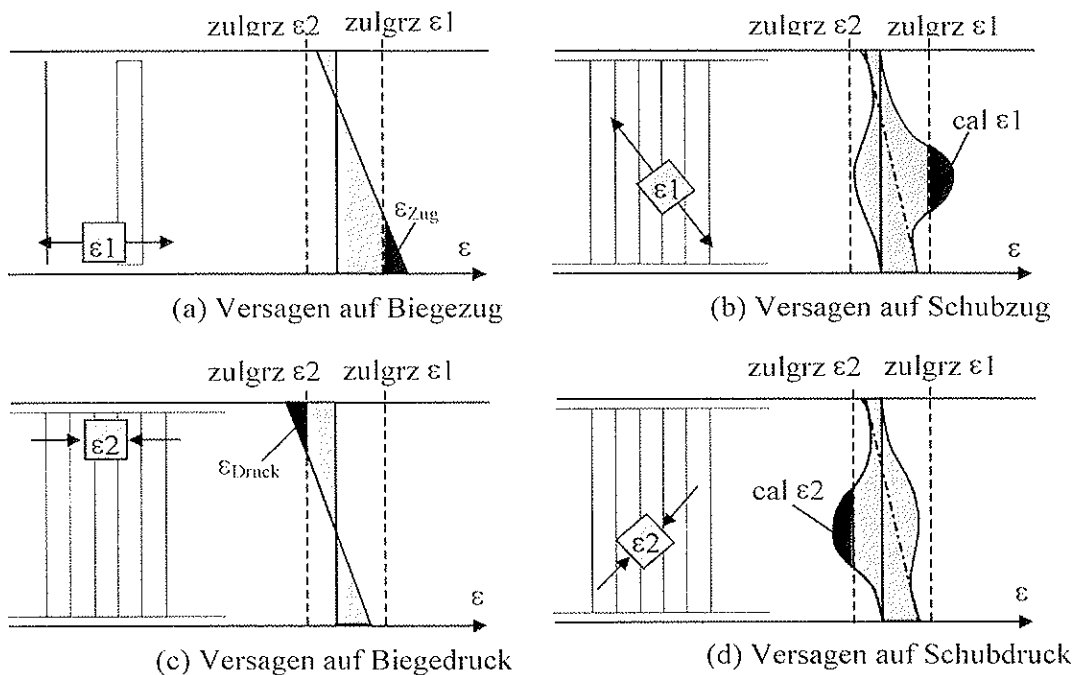
Bild 2: Generierung des Querschnittes in Knotenbereiche, Scheibenelemente und diskrete Punkte

Bild 3: Mögliche Anordnung der Bewehrung im Querschnitt, nur im Steg dargestellt



Allgemein bekannt (DIN 4227): $-3.5 ‰$ bzw. $-2 ‰ \leq \epsilon_{\text{Druck}}; \epsilon_{\text{Zug}} \leq 5 ‰$	Allgemeiner formuliert: $\text{zulgrz } \epsilon_2 \leq \text{cal } \epsilon_2 (\leq) \text{cal } \epsilon_1 \leq \text{zulgrz } \epsilon_1$
--	---

Bild 5:
Nachweisführung mit vier möglichen Versagensarten



Nur: N, My und Mz TB liefert die Dehnungsebene	N, My, Mz, Qz, Qy und T ETB liefert den Verzerrungszustand
---	---

Diese einfache Nachweisführung wird in Bild 5 dargestellt und mit dem in den Vorschriften geforderten Tragfähigkeitsnachweis für Biegung mit Normalkraft verglichen. Die dargestellten vier Versagensarten treten in allgemeiner beliebiger Kombination auf.

Für die Schnittgrößenkombination Biegemoment mit Normalkraft geht der allgemeiner formulierte Tragfähigkeitsnachweis der ETB exakt in den nach den Vorschriften geforderten Dehnungsnachweis über. Beide Verfahren liefern den gleichen Verzerrungszustand, der für diese Beanspruchung eine Dehnungsebene darstellt.

Ergebnis:

Die Nachweisführung unter Beachtung aller 6 Stabschnittgrößen kann demnach auf einen einzigen Nachweis (analog dem 1. Schritt in Kapitel 2) reduziert werden.

Wenn unter der Gesamtbeanspruchung keine unzulässigen Verzerrungen im Querschnitt auftreten, ist der Tragfähigkeitsnachweis erbracht. Demnach kann der 2. und 3. Schritt in Kapitel 2 entfallen.

Da im Falle der Schnittgrößenkombination Biegemoment mit Normalkraft beide Verfahren (TB und ETB) identisch sind, können zur Beurteilung der Verzerrungen infolge dieser Belastung die zulässigen Grenzwerte der Vorschriften (zulgrz ϵ_1 , zulgrz ϵ_2) direkt übernommen werden:

$$\text{zulgrz } \epsilon_1 = 5 ‰ \text{ (DIN 1045, 4227) bzw. } 20 ‰ \text{ (EC2)}$$

$$\text{zulgrz } \epsilon_2 = -3,5 ‰ \text{ Randbereich bzw. } -2 ‰ \text{ Mittenbereich (DIN 1045, 4227 und EC2)}$$

(vgl. DIN 4227, Bild 8: Dehnungsdiagramm)

In den Vorschriften sind nur zulässige Grenzwerte für den Beanspruchungszustand infolge der Schnittgrößenkombination Biegemoment mit Normalkraft angegeben. Für den allgemeinen Beanspruchungszustand (Schnittgrößenkombination: Biegemoment, Normalkraft, Querkraft und Torsionsmoment) werden keine zulässigen Grenzwerte genannt.

Hinweis:

Bei Untersuchungen von Tragwerken haben wir in Anlehnung an die dort vorgegebenen Werte

auch für den allgemeinen Beanspruchungszustand die kleineren Werte angesetzt:

$$\text{zulgrz } \varepsilon_1 = 5 \text{ ‰} \quad \text{zulgrz } \varepsilon_2 = -2 \text{ ‰}$$

Mit der Wahl des kleineren Wertes von $\text{zulgrz } \varepsilon_2 = -2 \text{ ‰}$ soll der Gefahr einer plötzlichen Zerstörung des Betons auf Druck (Bruch ohne Vorankündigung) entgegengewirkt werden.

Die Anwendung auf weitere Nachweise und Bauweisen

Da die Erweiterte Technische Biegelehre das Werkstoffverhalten wirklichkeitsnah berücksichtigt, gilt sie für jede Lastintensität. Demnach kann diese Nachweisführung, hier vorgestellt am Tragfähigkeitsnachweis, der unter rechnerischer Bruchlast zu führen ist, auch auf Nachweise die unter Gebrauchslast zu führen sind, sinngemäß übertragen werden.

Beim Nachweis zur Beschränkung der Rissbreite bedeutet sinngemäß z. B., dass aus der berechneten Hauptdehnung (cal ε_1) vorab eine Rissbreite (cal w) berechnet werden muss, um diese anschließend dem zulässigen Grenzwert (zulgrz w) gegenüberzustellen. Zur Berechnung der Rissbreite können unterschiedliche Risstheorien genutzt werden. Da bei der ETB die Materialien entsprechend dem Werkstoffverhalten berücksichtigt werden können und der Querschnitt aus unterschiedlichen Werkstoffen zusammengesetzt werden kann, kann die Nachweisführung, bei einer sinngemäßen Übertragung, nicht nur im Stahlbeton- und Spannbetonbau, sondern auch im Stahl- und Verbundbau eingesetzt werden.

Beim Tragfähigkeitsnachweis im Stahlbau bedeutet sinngemäß z. B., dass aus den berechneten Hauptspannungen (cal σ_1 , cal σ_2) vorab die Vergleichsspannung (cal σ_V) berechnet werden muss, um diese anschließend dem zulässigen Grenzwert (zulgrz σ_V) gegenüberzustellen. Zur Berechnung der Vergleichsspannung können unterschiedliche Fließtheorien genutzt werden.

Bei der Verzerrungsberechnung kann sowohl starrer Verbund als auch kein Verbund berücksichtigt werden. Die Nachweisführung beinhaltet demnach auch die neuen Bauweisen Externe Vorspannung und Segmentbauweise.

Demonstrationen

Die Leistung der Erweiterten Technischen Biegelehre wird an zwei Beispielen vorgestellt.

Rechteckquerschnitt unter einachsiger Biegung, Querkraft und Normalkraft aus Vorspannung

An einem Querschnitt wurde das Werkstoffverhalten der Materialien nacheinander derart verändert (linear elastisch, elastisch/plastisch, vorgespannt), dass die geschichtliche Entwicklung der Nachweisführung verfolgt werden kann.

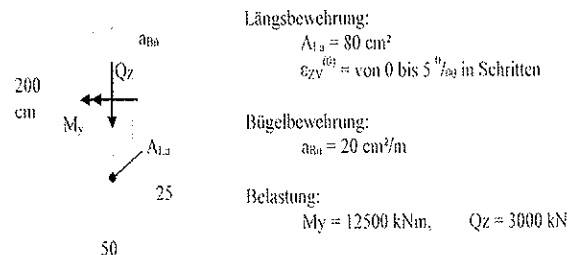


Bild 6: Rechteckquerschnitt, Geometrie und Belastung

Werkstoffe:

$$E_B = 25 \text{ 000 MN/m}^2, \quad \beta_B = -25 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{Bü} = 210 \text{ 000 MN/m}^2, \quad \beta_{Bü} = 500 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{L\bar{a}} = 210 \text{ 000 MN/m}^2, \quad \beta_{L\bar{a}} = 1300 \text{ MN/m}^2$$

Aus der Vielzahl der durchgeführten Untersuchungen wird hier nur der Zeitpunkt dargestellt an dem Mörsch die Fachwerkanalogie entwickelte.

Zu diesem Zeitpunkt war das n-Verfahren aktuell. Demnach sind für die Materialien im Querschnitt folgende Werkstoffverhalten anzusetzen (vgl. Bild 7a):

- Beton: Im Druckbereich linear elastisch, im Zugbereich keine Zugspannungen
 - Längsbewehrung: linear elastisch
 - Bügelbewehrung: elastisch/plastisch (bi-linear)
- Zusätzlich sind zu den Ergebnissen der Erweiterten Technischen Biegelehre noch diejenigen Ergebnisse eingetragen, die aus der Technischen Biegelehre folgen (vgl. Bilder 7b bis e, strichlierte Verläufe, $\gamma = 0$).

Die einzelnen Bilder erläutern sich selbst. Auf zwei fachliche Beobachtungen soll jedoch hingewiesen werden:

- Bei einer Beanspruchung der Stäbe infolge Querkraft (und Torsion) erfährt der Stab in Richtung der Stabachse eine Verlängerung; dies ist allgemein bekannt. Durch die Berücksichtigung der Gleitung liefert die ETB direkt diese Verlängerung der Stabachse (vgl. Bild 7b, $\varepsilon_1(\gamma=0)$ und ε_1)
- Durch die Berücksichtigung der Gleitung ändert sich der für Zustand 2 bekannte Schubspannungsverlauf (Zustand 2, $\tau = Q/bz$), welcher aus der Technischen Biegelehre folgt.

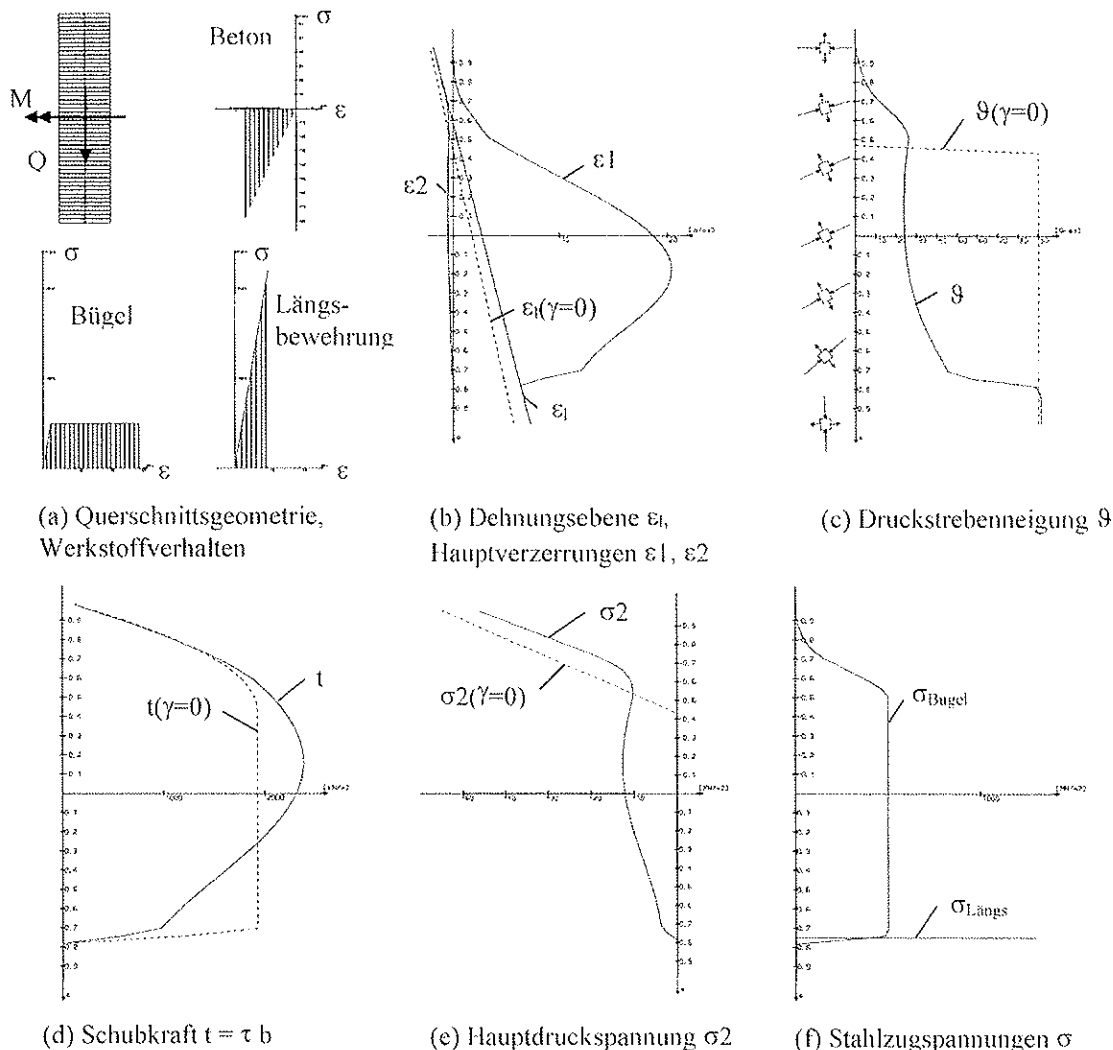


Bild 7:
Beanspruchungsverläufe über die Querschnittshöhe

Bereits Mörsch hat bei Versuchsauswertungen diese Abweichung gegenüber der TB beobachtet (vgl. Bild 7d und [2] Seite 27, Abb. 381).

Selbstverständlich können mit der Erweiterten Technischen Biegelehre noch weitere fachliche Zusammenhänge beobachtet und verständlich gemacht werden. An dieser Stelle ist jedoch hierfür kein Platz.

Werkstoffe:

$$E_B = 21\,000 \text{ MN/m}^2, \quad \beta_B = -21 \text{ MN/m}^2,$$

$$E_{BSt} = 210\,000 \text{ MN/m}^2, \quad \beta_{BSt} = 500 \text{ MN/m}^2,$$

$$E_{SpSt} = 195\,000 \text{ MN/m}^2, \quad \beta_{BSt} = 1570 \text{ MN/m}^2$$

Spannstahl: $A_{Z1} = 105 \text{ cm}^2, \quad \epsilon_{ZV}^{(o)} = 4,7 \text{ ‰},$
 $A_{Z2} = 168 \text{ cm}^2, \quad \epsilon_{ZV}^{(o)} = 4,6 \text{ ‰}$

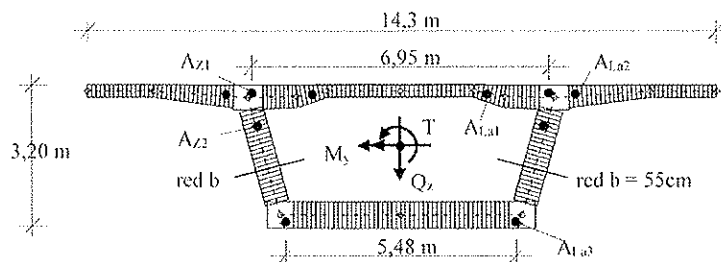
Längsbewehrung: $\mu_{Lä} = 0,18 \text{ ‰},$
 $A_{Lä1} = 56 \text{ cm}^2, \quad A_{Lä2} = 56 \text{ cm}^2, \quad A_{Lä3} = 40 \text{ cm}^2$

Bügelbewehrung: $a_{Bü,Gurte} = 20 \text{ cm}^2/\text{m},$
 $a_{Bü,Stege} = 98 \text{ cm}^2/\text{m}$

Hohlkastenquerschnitt unter einachsiger Biegung, Querkraft, Torsion und Normalkraft aus Vorspannung

Durch einen Betonierfehler bei einer Brücke konnte die wirksame Stegbreite nur mit 55 cm (statt 65 cm) angesetzt werden. Mit der ETB wurde der Nachweis der Tragfähigkeit erbracht.

Bild 8:
Hohlkastenquerschnitt



Schnittgrößen:

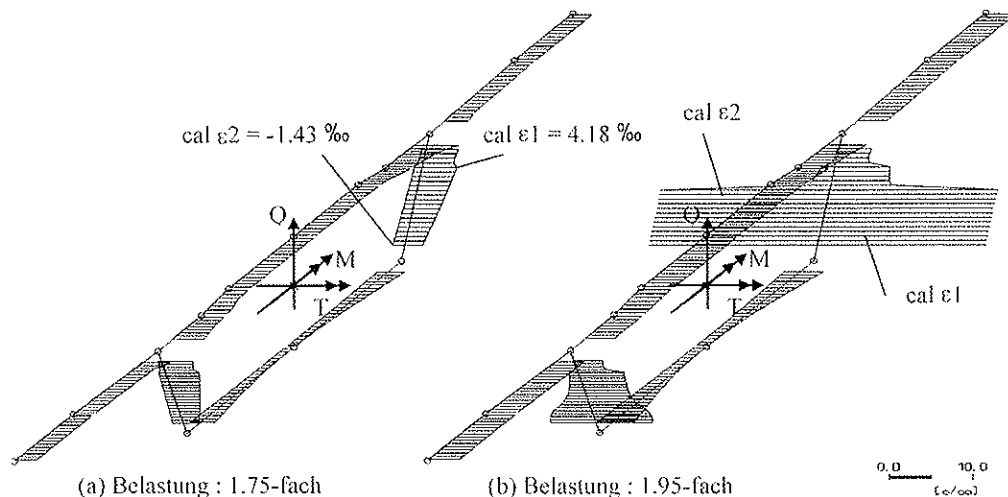
$$M_y = -174\,789 \text{ kNm}, \quad M_x = -197\,873 \text{ kNm},$$

$$Q_z = -21\,206 \text{ kN}, \quad Q_y = -23\,496 \text{ kN},$$

$$T = 3\,489 \text{ kNm}, \quad T = 3\,888 \text{ kNm},$$

$$\gamma = 1,75, \quad \gamma = 1,95$$

Bild 9:
Verlauf der
Hauptverzerrungen
 ε_1 und ε_2 im
Querschnitt



In Bild 9 sind die Hauptverzerrungen infolge der 1,75-fachen und der 1,95-fachen Belastung unter Berücksichtigung der Vorspannung dargestellt. Der Nachweis der Tragfähigkeit ist unter 1,75-facher Belastung zu führen. Mit den in Bild 9a berechneten Verzerrungen folgt:

$$\text{zulgrz } \varepsilon_2 \leq \text{cal } \varepsilon_2 \text{ und } \text{cal } \varepsilon_1 \leq \text{zulgrz } \varepsilon_1$$

$$-2 ‰ < -1,43 ‰ \text{ und } 4,18 ‰ < 5 ‰$$

Mit der Überprüfung, dass die berechneten Verzerrungen im Querschnitt die zulässigen Verzerrungen nicht überschreiten, ist der Nachweis der Tragfähigkeit erbracht. Da der berechnete Verzerrungszustand zur Schnittgrößenkombination M , Q und T unter Berücksichtigung der Vorspannung gehört, sind keine weiteren Nachweise (Fachwerkanalogie mit vektorieller Überlagerung für Q und $Q+T$) erforderlich.

Ergänzend ist in Bild 9b der unter 1,95-facher Belastung auftretende Verzerrungszustand dargestellt. Zu beobachten ist, dass im rechten Steg größere Verzerrungen auftreten als im linken Steg. Dies ist darin begründet, dass sich im rechten Steg der Schubfluss aus Querkraft und Torsion gleichgerichtet überlagern und im linken Steg entgegengesetzt.

Die berechneten Verzerrungen liegen im rechten Steg weit über den zulässigen Grenzen, der Querschnitt kann die 1,95-fache Belastung nicht aufnehmen.

Entwicklung und Ausblick

Mit [1] wurde zur Belegung der Theorie der Rechteckquerschnitt und der symmetrische Plattenbalken für die Belastung N , M_y und Q_z programmiert. Bei der Beurteilung und Begutachtung kritischer Tragwerke wurde mit diesem Programm das Trag- und Verformungsverhalten analysiert. Inzwischen wurde in die Theorie die Torsion ein-

gegliedert, es entstand ein Programm, welches für ein- und mehrzellige Hohlquerschnitte den Verzerrungszustand infolge der Schnittgrößenkombination N , M_y , M_z , Q_z , Q_y und T liefert. Hierbei gilt mein besonderer Dank Herrn Dipl.-Math. Johannes Heinz für die Implementierung des Verfahrens, wodurch die praktische Anwendung an konkreten Problemen aus der Ingenieurpraxis ermöglicht wurde.

Die iterative Berechnung des Gesamtbeanspruchungszustandes ist mittlerweile stabil, so dass das Programm für Parameterstudien genutzt werden kann. Die Theorie kann zur Klärung folgender Zusammenhänge herangezogen werden:

- Einfluss der Bügelneigung auf das Trag- und Verformungsverhalten.
- Einfluss des Fließens der Längsbewehrung auf den Schubfluss im Querschnitt; analog: Betonplastizieren.
- Einfluss der Lage der Nulllinie im Querschnitt auf die Abtragung der Torsion.

Von aktuellem Interesse (Externe Vorspannung) ist: Welchen Einfluss hat der Verbund zwischen Spannglied und Beton auf den Schubfluss im Querschnitt und damit auf die Sicherheit gegen Schubbruch.

Wegen der geometrisch undefinierten Abtragung der Torsion in einem Vollquerschnitt macht der Rechteckquerschnitt mit Torsion die größten Probleme, die Lösung soll in nächster Zeit angegangen werden.

Literatur

- [1] Hartung, B.: Zur Mechanik des Stahlbetonbalkens. Dissertation TH Darmstadt 1985
- [2] Mörsch, E.: Der Eisenbetonbau, Seine Theorie und Anwendung, 1. Band, 2. Hälfte, 5. Auflage. Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart 1922